17th International Scientific Conference 2025
Seccions of the Faculty of Economics and Informatics

https://doi.org/10.36007/5383.2026.359

SPECIÁLIS HALMAZOK ERDŐS–ULAM-SŰRŰSÉGE

ERDŐS–ULAM DENSITY OF SPECIAL SETS

Dániel TÓTH[1]

ABSTRACT

One of the most natural tools for measuring subsets of the natural numbers is the asymptotic density. The Erdős–Ulam density is a generalization of the asymptotic density. When studying such densities, we often work with sets of the form $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((c_n, d_n] \cap \mathbb{N})$, *where the integer sequences* (c_n) *and* (d_n) *satisfy* $0 \leq c_n < d_n < c_{n+1}$. *With the help of such block-structured sets, the properties of Erdős–Ulam densities can be investigated. In this paper, we apply the Cesàro–Stolz theorem to compute Erdős–Ulam densities. We determine some necessary and sufficient conditions for the existence of the Erdős–Ulam density. We also study the relationship between densities defined by the Erdős–Ulam functions* $f(n)$ *and* $f^*(n) = f(n)/(f(1) + \cdots + f(n))$ *in the case of block-structured sets.*

KEYWORDS

asymptotic density, logarithmic density, Erdős–Ulam density

BEVEZETŐ

Legyen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ a természetes számok halmaza. A természetes számok részhalmazainak nagyságának kvantitatív jellemzésében az egyik legtermészetesebb és leggyakrabban alkalmazott eszköz az *aszimptotikus sűrűség*.

1. Definíció Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$, és jelöljük $A(n) = |\{a \in A : a \leq n\}|$. Ekkor az

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \quad \text{és} \quad \overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

értékeket az A halmaz alsó, illetve felső aszimptotikus sűrűségének nevezzük. Ha $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$, akkor ez a közös érték az A halmaz aszimptotikus sűrűsége (Tóth, 2006).

Jelöljük χ_A-val az A halmaz karakterisztikus függvényét, azaz

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad n \in A, \\ 0, & \text{ha} \quad n \notin A. \end{cases}$$

Egy $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ függvényt *Erdős–Ulam-függvénynek* nevezünk, ha teljesül, hogy $f(1) = 1$, továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty, \tag{1}$$

[1]Mgr. Tóth Dániel, Selye János Egyetem, GIK, Matematika Tanszék, tothd@ujs.sk

és

$$\lim_{n\to\infty} f^*(n) = 0, \quad \text{ahol} \quad f^*(n) = \frac{f(n)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f(j)}. \tag{2}$$

Egy Erdős–Ulam-függvény segítségével definiálhatunk egy *Erdős–Ulam-sűrűséget* a következőképpen.
Legyen f egy Erdős–Ulam-függvény. Tetszőleges $A \subset \mathbb{N}$ esetén legyen

$$F_A(n) = \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)}, \quad \text{ahol} \quad A_f(n) = \sum_{j=1}^{n} f(j)\cdot\chi_A(j), \quad \mathbb{N}_f(n) = \sum_{j=1}^{n} f(j) \quad \text{(Bukor et al., 2020).}$$

Nyilván minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \le F_A(n) \le 1$.
Legyen

$$\underline{d_f}(A) = \liminf_{n\to\infty} F_A(n) \quad \text{és} \quad \overline{d_f}(A) = \limsup_{n\to\infty} F_A(n)$$

az A halmaz alsó, illetve felső f-sűrűsége (Bukor et al., 2022). Nyilván

$$0 \le \underline{d_f}(A) \le \overline{d_f}(A) \le 1. \tag{3}$$

Ha $\underline{d_f}(A) = \overline{d_f}(A)$, akkor az A halmaz *rendelkezik* f-sűrűséggel, melyet $d_f(A)$-val jelölünk.
Az aszimptotikus sűrűség az $f(n) = 1$, a logaritmikus sűrűség pedig az $f(n) = \frac{1}{n}$ választásnak felel meg.
Tetszőleges f Erdős–Ulam-függvény esetén a véges halmazok f-sűrűsége 0, míg a véges komplementerű halmazoknak 1. A természetes számok többi részhalmaza felírható a következő alakban (Grekos et al., 2010, 2003).

2. Definíció Legyenek (c_n) és (d_n) egész számokból álló sorozatok, amelyekre

$$0 \le c_n < d_n < c_{n+1}.$$

Legyen

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((c_n, d_n] \cap \mathbb{N}). \tag{4}$$

Bizonyos (4) alakban adott halmazok Erdős–Ulam-sűrűsége kiszámolható a Cesàro–Stolz-tétel alkalmazásával (Paštéka, 2017).

Cesàro–Stolz tétel Legyenek (a_m) és (b_m) olyan valós sorozatok, hogy

(i) $0 < b_1 < b_2 < \ldots$ és $\lim_{m\to\infty} b_m = \infty$,

(ii) $\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}-a_m}{b_{m+1}-b_m} = k \in \mathbb{R}$.

Ekkor $\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = k$.

Ha a tételbe $a_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n, \quad b_m = \sum_{n=1}^{m} \beta_n$ alakú sorozatokat helyettesítünk, akkor a következő, számunkra megfelelőbb tételt kapjuk.

1. Következmény (Cesàro–Stolz tétel) Legyenek $(\alpha_n), (\beta_n)$ olyan pozitív valós számokból álló sorozatok, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty, \tag{5}$$

valamint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = k. \tag{6}$$

Ekkor

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \alpha_n}{\sum_{n=1}^{m} \beta_n} = k. \tag{7}$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. A (6) egyenlőségből következik, hogy létezik olyan n_0, hogy minden $m > n_0$ esetén

$$(k-\varepsilon)\beta_m \le \alpha_m \le (k+\varepsilon)\beta_m.$$

Tehát

$$(k-\varepsilon)\sum_{n=n_0}^{m} \beta_n \le \sum_{n=n_0}^{m} \alpha_n \le (k+\varepsilon)\sum_{n=n_0}^{m} \beta_n.$$

Ezért és (5) alapján

$$k-\varepsilon \le \liminf_{m\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \alpha_n}{\sum_{n=1}^{m} \beta_n} \le \limsup_{m\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \alpha_n}{\sum_{n=1}^{m} \beta_n} \le k+\varepsilon.$$

Az $\varepsilon \to 0$ esetben kapjuk a (7) egyenlőséget (Paštéka, 2017, 42. old.). □

A következő két lemma a (4) alakú halmazok azon tulajdonságát mutatják be, hogy a $\left(\frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)}\right)$ sorozat limesz inferiorjához tartozó indexsorozat a (c_n) sorozatnak egy részsorozata, illetve a limesz szuperiorjához tartozó indexsorozat a (d_n) sorozatnak egy részsorozata.

1. Lemma Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$. Ekkor minden $n \ge 2$ természetes számra

- ha $n \in A$, akkor $\dfrac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} \ge \dfrac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n-1)}$,
- ha $n \notin A$, akkor $\dfrac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} \le \dfrac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n-1)}$.

Bizonyítás. Legyen $n \ge 2$ és $n \in A$. Ekkor $A_f(n) = A_f(n-1) + f(n)$, tehát

$$\frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \frac{A_f(n-1)+f(n)}{\mathbb{N}_f(n-1)+f(n)} \ge \frac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n-1)}.$$

Legyen most $n \ge 2$ és $n \notin A$. Ekkor $A_f(n) = A_f(n-1)$, tehát

$$\frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \frac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n)} \le \frac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n-1)}.$$

□

2. Következmény Legyen A egy (4) módon definiált halmaz. Ekkor

$$\underline{d_f}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)} \quad \text{és} \quad \overline{d_f}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)}.$$

Megjegyzés Egy (4) módon definiált A halmazra nem feltétlenül teljesül, hogy

$$\underline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)} \quad \text{és} \quad \overline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)}.$$

EREDMÉNYEK

A következő tételben olyan feltételt adunk, amely esetén teljesül, hogy a $\left(\frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)}\right)$ sorozat limesz inferiorjához, illetve limesz szuperiorjához tartozó indexsorozat megegyezik a (c_n), illetve a (d_n) sorozatokkal.

1. Tétel Legyen A egy (4) módon definiált halmaz. Ha

$$\left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{N}_f(c_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_n) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(d_n) - \mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_n)} = \alpha,\right]$$
$$\left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(d_n) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(d_n)} = \beta,\right)$$

akkor

$$\left[\underline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)} = \alpha,\right]$$
$$\left(\overline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)} = \beta\right).$$

Bizonyítás. Az állítás közvetlenül igazolható a Cesàro–Stolz tétellel. Definiáljuk a

$$\beta_n = \mathbb{N}_f(c_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_n), \quad \beta'_n = \mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(d_n),$$
$$\alpha_n = \mathbb{N}_f(d_n) - \mathbb{N}_f(c_n), \quad \alpha'_n = \mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_{n+1})$$

sorozatokat. Alkalmazzuk a Cesàro–Stolz tételt a $(\alpha_n), (\beta_n)$, illetve $(\alpha'_n), (\beta'_n)$ sorozatokra, amiből rögtön adódik az állítás. □

3. Következmény Ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(c_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(d_n) - \mathbb{N}_f(d_{n-1})} = 1, \tag{8}$$

akkor az előző tételben $\alpha = \beta$, azaz

$$\underline{d_f}(A) = \overline{d_f}(A).$$

A Cesàro–Stolz tétel alapján a (8)-ből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_n)} = 1$.

A következő tételben egy pontos feltételt adunk az f-sűrűség létezésére.

2. Lemma Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ és f egy Erdős–Ulam-függvény. Az A pontosan akkor rendelkezik f-sűrűséggel, ha létezik a természetes számoknak olyan (i_n) sorozata, hogy

(i) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $i_n < i_{n+1}$,

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})}$,

(iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})}$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbb{N}_f(i_{n+1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} = 1$.

Bizonyítás. Ha $d_f(A) = \overline{d_f}(A)$, akkor legyen $i_n = n$ $(n = 1, 2, \dots)$ sorozat. Ekkor az (i)-(iv) tulajdonságok nyilván teljesülnek.
Legyen (i_n) olyan sorozat, hogy teljesülnek az (i)-(iv) tulajdonságok

$$\overline{d_f}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n-1}) + \mathbb{N}_f(i_{2n}) - \mathbb{N}_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})}$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{A_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})} + 1 - \frac{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \right) = \underline{d_f}(A).$$

Amiből következik, hogy $\underline{d_f}(A) = \overline{d_f}(A)$.

□

Megjegyzés A 2. Következmény és a 2. Lemma alapján könnyen tudunk olyan (4) alakú halmazt konstruálni, amelynek nem lesz f-sűrűsége. Ehhez elégséges a (c_n), (d_n) sorozatot úgy megválasztani, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbb{N}_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)} > 1$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_n)} > 1$ teljesüljön.

A következőkben megvizsgáljuk, hogy milyen értéket vesz fel az alsó, illetve felső f-sűrűség a (4) alakú halmazok esetében, ha azok nem rendelkeznek f^*-sűrűséggel.

3. Lemma Legyen f egy Erdős–Ulam-függvény. Ha valamilyen (i_n) egész számokból álló sorozatra

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_{f^*}(i_{n+1})}{\mathbb{N}_{f^*}(i_n)} > 1,$$

akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} = \infty.$$

Bizonyítás. Felírhatjuk az alábbi egyenlőtlenséget.

$$\mathbb{N}_{f^*}(i_{n+1}) = \mathbb{N}_{f^*}(i_n) + \sum_{k=i_n+1}^{i_{n+1}} \frac{f(k)}{\mathbb{N}_f(k)}$$

$$\le \mathbb{N}_{f^*}(i_n) + \sum_{k=i_n+1}^{i_{n+1}} \frac{f(k)}{\mathbb{N}_f(i_n)}$$

$$= \mathbb{N}_{f^*}(i_n) + \frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1}) - \mathbb{N}_f(i_n)}{\mathbb{N}_f(i_n)}.$$

Ebből közvetlenül adódik, hogy

$$\frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} \geq \mathbb{N}_{f^*}(i_{n+1}) - \mathbb{N}_{f^*}(i_n). \tag{9}$$

A feltétel szerint létezik olyan $\delta > 0$ és (s_n) indexsorozat, hogy

$$\frac{\mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n+1})}{\mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n})} \geq 1 + \delta \quad \text{minden} \quad n \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n+1}) - \mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n}) \geq \delta \mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n}).$$

A (9) egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\mathbb{N}_f(i_{s_n+1})}{\mathbb{N}_f(i_{s_n})} \geq \mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n+1}) - \mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n}) \geq \delta \mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n}).$$

Mivel $\mathbb{N}_{f^*}(i_{s_n}) \to \infty$ (ahogy $n \to \infty$), ezért

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} = \infty. \qquad \square$$

2. Tétel Legyen f egy Erdős–Ulam-függvény és (i_n) olyan egész számokból álló sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_{f^*}(i_{n+1})}{\mathbb{N}_{f^*}(i_n)} > 1. \tag{10}$$

Definiáljuk az

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big((i_{2n-1}, i_{2n}] \cap \mathbb{N} \Big)$$

halmazt. Ekkor

$$\underline{d_f}(A) = 0, \quad \overline{d_f}(A) = 1.$$

Bizonyítás. Az A halmaz definíciója alapján

$$A_f(i_{2n}) - A_f(i_{2n-1}) = \mathbb{N}_f(i_{2n}) - \mathbb{N}_f(i_{2n-1}).$$

A 2. Következmény szerint

$$\begin{aligned}
\overline{d_f}(A) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n-1}) + \mathbb{N}_f(i_{2n}) - \mathbb{N}_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{A_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} + \frac{\mathbb{N}_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} - \frac{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \right).
\end{aligned}$$

A (10) és a 3. Lemma alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(i_{n-1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} = 0.$$

Mivel $A_f(i_{2n-1}) \leq \mathbb{N}_f(i_{2n-1})$ kapjuk, hogy $\overline{d_f}(A) = 1$. Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$\underline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n+1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n+1})} = 0.$$

□

Megjegyzés A 2. Tételben a (10) feltétel és a 2. Lemma alapján az A halmaz nem rendelkezik f^*-sűrűséggel.

Következtetések
Ebben a cikkben megvizsgáltuk a (4) alakú halmazok néhány, Erdős–Ulam-sűrűségekre vonatkozó tulajdonságát.
Az 1. Tételben a (c_n) és (d_n) sorozatok által definiált halmaz f-sűrűségeit határoztuk meg, valamint feltételt adtunk az f-sűrűség létezésére. Az 1. Tétel segítségével könnyen megadható egy olyan algoritmus, amely tetszőleges $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ értékekhez olyan $A \subseteq \mathbb{N}$ halmazt konstruál, amelyre $\underline{d_f}(A) = \alpha$, $\overline{d_f}(A) = \beta$.
A 2. Tétel eredményét értelmezhetjük úgy, hogy ha egy (4) alakú A halmazra teljesül az, hogy

$$\underline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)} \quad \text{és} \quad \overline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)},$$

akkor az alsó, illetve felső f-sűrűsége rendre 0 és 1.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Bukor, J., Filip, F., & Tóth, J. T. (2020). Sets with countably infinitely many prescribed weighted densities. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 50(2), 467–477. https://doi.org/10.1216/rmj.2020.50.467

Bukor, J., Filip, F., Šustek, J., & Tóth, J. T. (2022). Comparing weighted densities. *Journal of Inequalities and Applications*, 2022(1), 146. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02885-y

Grekos, G., Mišík, L., & Tóth, J. T. (2010). Density sets of sets of positive integers. *Journal of Number Theory*, 130(6), 1399–1407. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2009.12.007

Grekos, G., Šalát, T., & Tomanová, J. (2003). Gaps and densities. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 46 (94)(3/4), 121–141.

Paštéka, M. (2017). *Density and related topics*. Praha ; Bratislava: Academia, Veda.

Tóth, J. T. (2006). Teória r-hustých množín a jej aplikácie v školskej matematike. *Eruditio - educatio*, 1(3), 31–94.