17th International Scientific Conference 2025
Seccions of the Faculty of Economics and Informatics

https://doi.org/10.36007/5383.2026.349

A HÁROMSZÖG MAGASSÁGPONTJÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSAI TETRAÉDERRE

ON THE GENERALIZATION OF THE TRIANGLE ORTHOCENTER TO THE TETRAHEDRON

Ágnes BAZSO[1]

ABSTRACT
The orthocenter of a triangle is one of the oldest and most classical triangle centers. Its analogue for the tetrahedron, however, is far less straightforward. In this study, we collect and compare the different approaches proposed in the literature, relating them to their planar counterparts, and we also outline a new possible relation. The language of the presentation is intentionally light and didactical, designed to engage those less familiar with the topic and to serve as a motivational resource for students seeking to develop their spatial reasoning skills.

KEYWORDS
tetrahedron, orthocenter, didactical approach

BEVEZETŐ

A háromszög magasságpontja a geometria egyik legrégebben ismert és legklasszikusabb nevezetes pontja. Létezése és egyértelműsége számtalanszor bizonyítást nyert. Térbeli megfelelője, a tetraéder „magasságpontja” azonban jóval kevésbé egyértelmű fogalom. Számos analógia létezik, ezek közül néhány a síkbeli magasságpont bizonyos tulajdonságait igyekeznek megőrizni, továbbiak pedig új szemléletet kínálnak a térgeometria sajátos viszonyaira. Tanulmányunkban áttekintjük a szakirodalomban felbukkanó különféle értelmezéseket, kiemelve azok kapcsolatait a háromszög magasságpontjával. A tanulmány nyelvezete szándékosan könnyed és didaktikai jellegű: célunk, hogy a témában kevésbé jártasak érdeklődését is felkeltsük, valamint hogy inspirációs forrást nyújtsunk a középiskolás diákok számára. Úgy véljük, a tetraéder „hiányzó magasságpontjának” keresése nemcsak geometriai érdekesség, hanem olyan gondolkodtató probléma, amely hozzájárulhat a térbeli gondolkodás és az absztrakciós készség fejlődéséhez is.

JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA

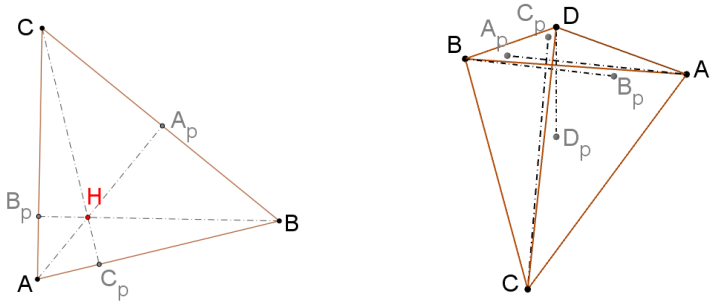
A tanulmány során klasszikus, euklideszi síkban található általános ABC háromszögről és térben található általános $ABCD$ tetraéderről lesz szó. A következő jelöléseket használjuk: egyszerűbb ábránál, amely kevesebb pontot tartalmaz, háromszög és tetraéder esetén egyaránt, egy P pont oldalakra ill. lapokra vetített merőleges vetületét, azaz **talppontját** P_p-vel jelöljük. *Megjegyzés:* A p index a talppont angol megfelelőjének a *pedal point*-nak a rövidítése.

[1]Mgr. Bazso Ágnes, Selye János Egyetem, GIK, Matematika Tanszék, bazso.agnes@student.ujs.sk

Komplexebb ábrák esetén, ahol a tetraéder belső pontjainak lapokra vett merőleges vetületét (azaz a talppontjait) szeretnénk ábrázolni, egy új jelölést vezetünk be: a P pont talppontja az XYZ lapsíkon (pontosabban az XYZ pontok által definiált síkon) P_{XYZ}. Vagyis egy M pont talppontja az ABC lapsíkon M_{ABC}, a BCD lapsíkon M_{BCD}, és így tovább. Megjelenik kétdimenziós változata is, ahol például egy M pont talppontja az AB oldalon M_{AB}.
A cikk során megjelenik a **szimplex** kifejezés is. Egy kétdimenziós síkban a kétdimenziós szimplex az általános háromszög - egy olyan alakzat, melyet három lineárisan független pont határoz meg, vagyis ez a három pont nem egy egyenesre illeszkedik. Egy háromdimenziós térben a háromdimenziós szimplex az általános tetraéder - egy olyan alakzat, melyet négy lineárisan független pont határoz meg, vagyis ebből a négy pontból semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Egy n-dimenziós térben az n-dimenziós szimplexet $n+1$ lineárisan független pont határoz meg. A **hipersík** egy n-dimenziós tér $n-1$ dimenziós altere, vagyis olyan tér, mely tartalmaz egy pontot az n-dimenziós térből és $n-1$ lineárisan független vektor határoz meg. A sík hipersíkja egy egyenes, a tér hipersíkja egy sík.

MAGASSÁGVONALAK METSZÉSPONTJA

A háromszög magasságpontjának legelemibb definíciója a *csúcsokon áthaladó és a szemközti oldalra merőleges egyenesek, azaz a magasságvonalak metszéspontja.* Ez a pont minden háromszög esetén létezik és egyértelmű (1a. ábra).
A szabályos tetraédernek ugyanúgy mint a szabályos háromszögnek, triviális magasságpontja van, mely egybeesik súlypontjával, körülírt gömbjének középpontjával és beírt gömbjének középpontjával. Horváth & Németh (1996) a kiterjesztett hiperbolikus síkban vizsgálta az ún. ideális háromszögek tulajdonságait és a kiterjesztett hiperbolikus többdimenziós térben az ideális szimplexek szabályosságának kérdését. Számos eredményük nemcsak a hiperbolikus, hanem az euklideszi esetre is érvényes. A tetraéderek szabályosságával, illetve lapjaik egybevágóságával kapcsolatos részletesebb elemzésekhez a szerzők munkáit ajánljuk.
Egy általános tetraéder csúcsaiból a szemközti lapra húzott merőleges egyenesek legtöbb esetben azonban kitérő egyenesek, így látszólag egy általános tetraédernek nincs magasságpontja (1b. ábra).



(a) Háromszög magasságvonalainak metszete a magasságpont.

(b) Tetraéder magasságvonalai általában kitérőek.

1. ábra. Szimplexek magasságvonalai síkban és térben.

Létezik azonban a tetraédereknek egy családja, amelyeknek magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ezeket a tetraédereket ***ortocentrikus*** vagy ***magasságpontos tetraéder***eknek ne-

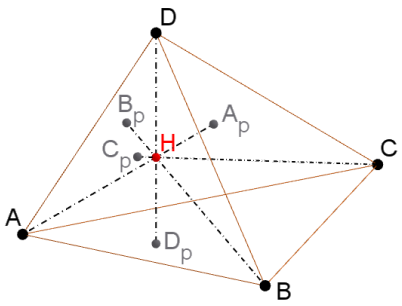
vezzük. Egy tetraéder ortocentrikus, éppen akkor, ha teljesül valamelyik feltétel ezek közül (Molnár, 1958) (a tulajdonságok ábrázolása a 2. ábrán látható):

1. A tetraédernek akkor és csak akkor van magasságpontja, ha a tetraéder három szemközti élpárja közül kettő merőleges egymásra (ebből a harmadik szemközti élpár merőlegessége már következik).

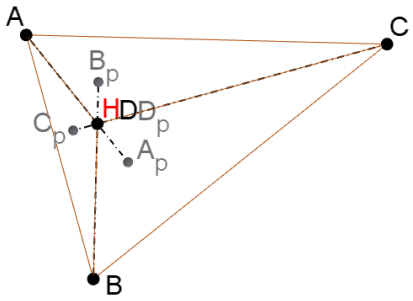
2. Csúcsainak a szemközti lapokon levő merőleges vetületei a lapok magasságpontjai.

3. A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő egyenesszakaszok (a tetraéder éltengelyei) egyenlők.

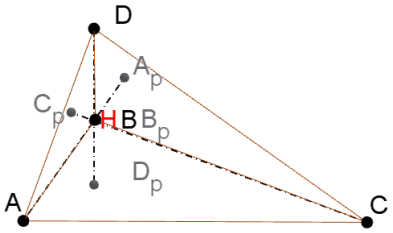
4. Ortocentrikus tetraédernél a magasságpont H, a súlypont G és a körülírt gömb középpontja O egy egyenesen fekszenek (ez a tetraéder Euler egyenese).



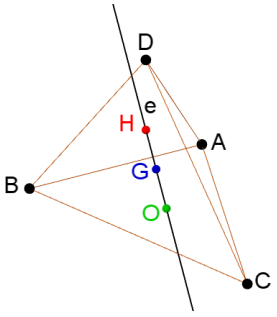
(a) Ortocentrikus tetraéder.



(b) Ortocentrikus tetraéder ABC lapra vetített nézete.



(c) Ortocentrikus tetraéder ACD lapra vetített nézete.



(d) Ortocentrikus tetraéder Euler egyenesén fekszik a súlypont G, a körülírt gömb középpontja O és a magasságpont H.

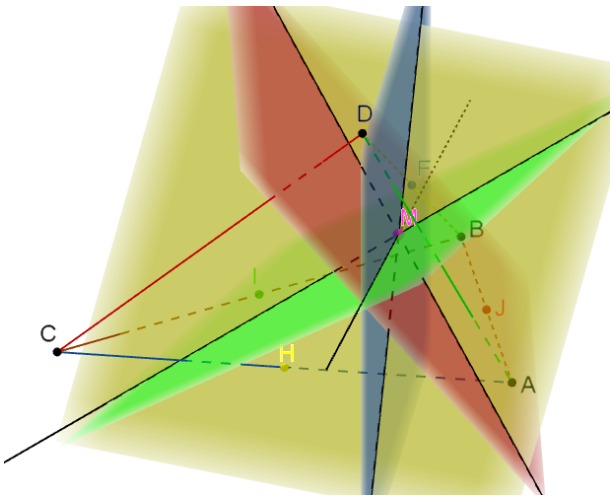
2. ábra. Ortocentrikus tetraéder tulajdonságainak ábrázolása.

Az ortocentrikus tetraéderek tulajdonságaival számos tanulmány foglalkozik. A magasságvonalak metszeteként definiált magasságpont hátrányát abban látjuk, hogy a tetraéderek szűk családjában létezik.

MONGE PONT

Egy újabb megközelítése a tetraéder magasságpontjának a Monge pont (Leopold & Martini, 2018), (Cheung & Ko, 2018): *Legyen adott egy általános tetraéder. Az a hat sík, amely a tetraéder élének felezőpontját tartalmazza és merőleges ezen éllel szemben levő élre, egy pontban metszik egymást* (3. ábra). Amennyiben ortocentrikus tetraéderről van szó, a Monge pont egybeesik az előzőekben leírt magasságponttal. Ezen ok alapján sokszor a Monge pontot az általános tetraéder hiányzó magasságpontjának titulálják.

A Monge pontnak van egy következő megfelelő tulajdonsága. Mint az köztudott, egy háromszög magasságpontja, súlypontja és körülírt körének középpontja egy egyenesen, az Euler egyenesen fekszenek egymástól 2:1 arányban. A térbeli Monge pont, a tetraéder súlypontja és a körülírt gömbjének középpontja is egy egyenesen fekszenek, egymástól 1:1 arányban (4a. ábra). Ez a tulajdonság általánosítható egy n-szimplexre is, ahol ezen pontok távolságainak aránya $2 : (n-1)$ lesz (Havlicek & Weiß, 2003).

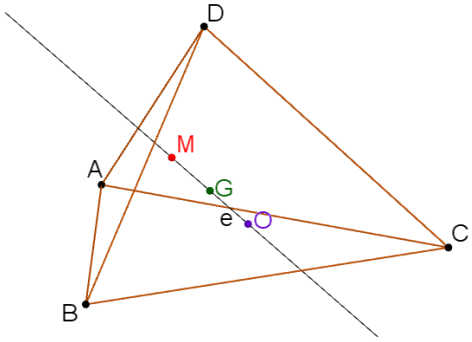


3. ábra. Monge pontot definiáló síkok és metszeteik.

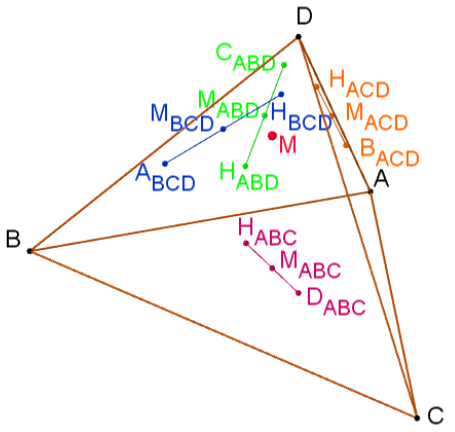
A Monge pont konstrukcióját általánosan a következőképp képzelhetjük el: egy n-dimenziós szimplexnek az n-dimenziós euklideszi térben $n+1$ csúcspontja van. A szimplex minden élhez pontosan egy hipersík tartozik, ami merőleges erre az élre és tartalmazza a "szemközti csúcsok" (az adott élre nem illeszkedő csúcsok) súlypontját. Az ilyen hipersíkok száma $\binom{n+1}{2}$, és egy pontban metszik egymást. A térben definiált Monge pont tehát síkban pontosan megegyezik a magasságponttal (Havlicek & Weiß, 2003).

A Monge-pont, pontosabban annak talppontjai, kompromisszumot jelent a csúcsok lapokra vetített merőleges vetületei és a lapok ortocentrumai között: a Monge-pont egyenlő távolságra van egy lap ortocentrumától és a szemközti csúcs rávetített vetületétől (ez igaz mind a négy lapra) (Hadjisavvas et al., 2016). Ezzel a tulajdonsággal a Monge pont felfogható, mint azon egyenesek metszéspontja, melyek merőlegesek a lapokra és áthaladnak azon a ponton, amely felezi a szemközti csúcs talppontja és a lapháromszög magasságpontja alkotta szakaszt (4b. ábra).

Monge ponttal kapcsolatos további érdekes felfedezés, hogy ha a tetraéder beírt gömbjének középpontját a Monge pont szerint tükrözzük, akkor azon gömbök hatványpontját kapjuk, amelyeknek sugarai a tetraéder csúcspontjai és a beírt gömb lapérintő pontjai határoznak meg, bővebben Herrera & Tran (2022) tanulmányában.



(a) A Monge pont és a tetraéder Euler egyenesének kapcsolata.



(b) A Monge pont lapokra vett merőleges vetületei M_{XYZ}, a szemközti csúcsok lapokra vett vetületei X_{XYZ} és a lapháromszögek magasságpontjai H_{XYZ} közötti kapcsolat.

4. ábra. Monge pont tulajdonságai.

KVÁZI ORTOCENTRUM

A kvázi ortocentrumot a Monge pont általánosításával kapjuk, leírása egy középiskolás diákok számára rendezett tudományos versenyre írt tanulmányban található (Cheung & Ko, 2018). A kvázi ortocentrum tegyen eleget két tulajdonságnak, mely a Monge pont tulajdonságainak egy lehetséges általánosítása: legyen olyan egyenesek metszéspontja, melyek (1) merőlegesek a lapsíkokra, (2) ezzel a merőleges lapsíkkal vett metszéspontja bizonyos arányban osztja a lapháromszög Euler egyenesén fekvő bizonyos lapközéppontja és az erre a lapra vett szemközti csúcs merőleges vetülete alkotta szakaszt és (3) a kvázi ortocentrum illeszkedjen a tetraéder Euler egyenesére.

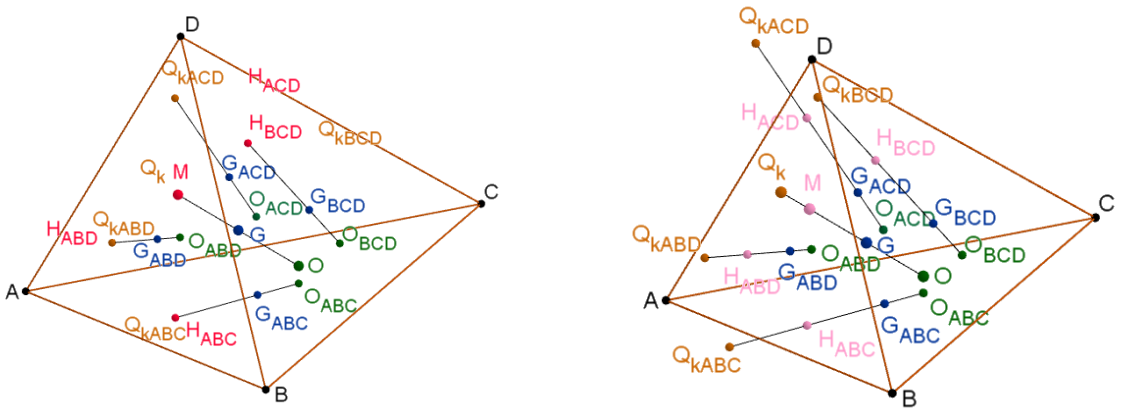
A megfelelő Euler egyeneseken megjelenő arányok általánosításával és a fent említett megkötések segítségével kapható, hogy a tetraéder kvázi ortocentrumát mint

$$Q_k = O + \frac{4}{3+k}(G - O),$$

és a lapháromszögek kvázi ortocentrumait mint

$$Q_{kXYZ} = O_{XYZ} + \frac{3}{2+k}(G_{XYZ} - O_{XYZ})$$

definiálhatjuk minden $k \neq -2, -3$ esetén, ahol G a tetraéder súlypontja, O a tetraéder köré írható gömbjének középpontja, G_{XYZ} az XYZ lapháromszög súlypontja és O_{XYZ} az XYZ lapháromszög köré írható körének középpontja (5b. ábra). A Monge pontot és a hozzá tartozó lapháromszögek magasságpontjait a $k = -1$ értékre kapjuk (5a. ábra).



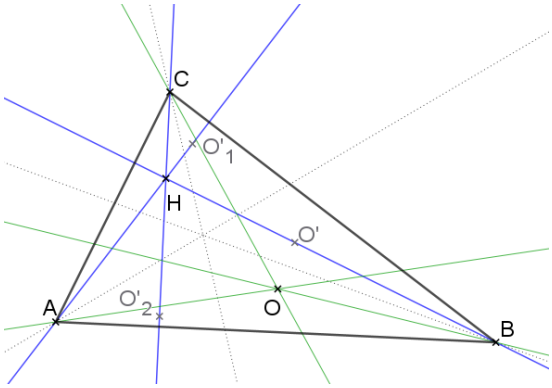
(a) Kvázi ortocentrum helyzete $k = -1$ értékre.

(b) Kvázi ortocentrumok egy általános $k \neq -2, -3$ értékre.

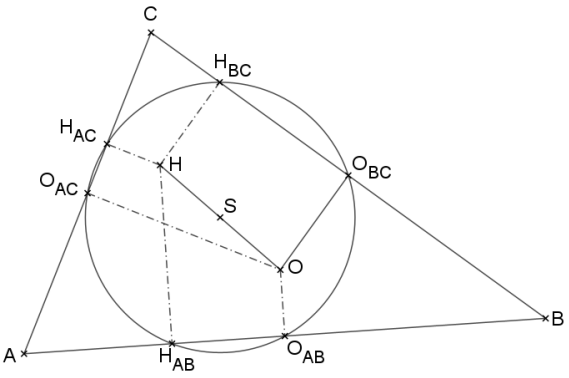
5. ábra. Kvázi ortocentrumok különböző k értékekre.

IZOGONÁLIS ORTOCENTRUM

Ismerkedjünk meg először az izogonális konjugált fogalommal. Adott egy általános ABC háromszög (nevezzük referencia háromszögnek) és egy P pont a síkban. Tükrözzük sorra az AP egyenest az A csúcsnál lévő belső szögfelező szerint, a BP egyenest a B csúcsnál lévő belső szögfelező szerint és végül a CP egyenest a C csúcsnál lévő belső szögfelező szerint. Az így kapott egyenesek egyetlen pontban metszik egymást, ezt a pontot nevezzük a P pont izogonális konjugáltjának. Régóta ismert, hogy a háromszög köré írható körének középpontja és magasságpontja izogonálisan konjugált pontpár (6a. ábra), valamint hogy ezen pontok talppontjai egy körön fekszenek, ez a Feuerbach kör, más néven kilencpontos kör. A Feuerbach kör középpontja a magasságpont és a köré írható kör középpontja által alkotott szakasz felezőpontja (6b. ábra)



(a) A magasságpont és a körülírható kör középpontja izogonálisan konjugált pontpár.

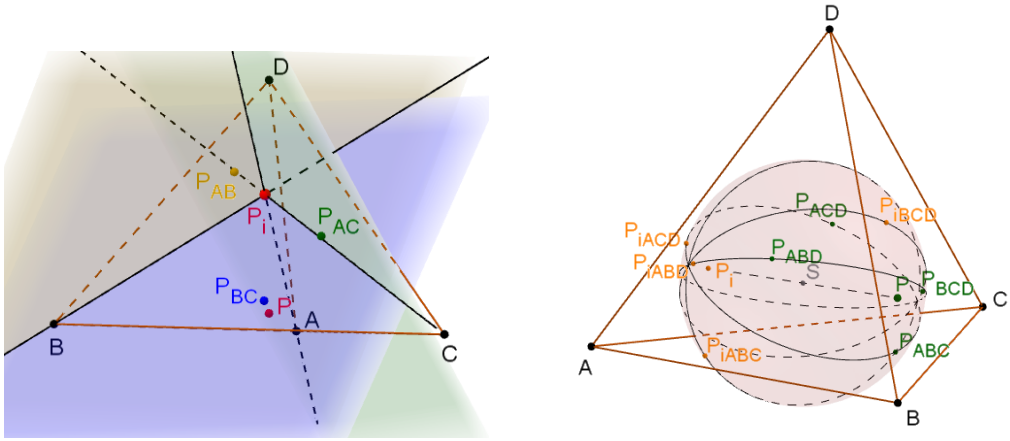


(b) A háromszög Feuerbach köre.

6. ábra. Izogonális pontpárok és a Feuerbach kör.

Izogonálisan konjugált pontpárokkal és ponthalmazokkal már a 19. század végén nagyon sok matematikus foglalkozott (Casey, 1893). Remek tanulmányok születtek ezekben az időkben,

mint például Boutin vagy Mandart tanulmányai a Feuerbach hiperboláról (Boutin, 1890), (Mandart, 1893), mely szintén erősen kötődik a magasságponthoz.
Felmerül a kérdés, hogy létezik-e izogonális konjugáltja egy P pontnak egy referencia tetraéderre vonatkoztatva. Egy tetraéder pontjának izogonális konjugáltjának jellemzőire és tulajdonságaira az előző alfejezetben is említett tudományos versenyre írt tanulmányban találhatunk rá, melyet két diák írt Cheung Pak Leong tanár vezetése alatt (Yu & Lai, 2023). A tanulmány általános leírásokat tartalmaz n-szimplexekre, ezeket 3 dimenziós euklideszi térre fogalmaztuk át. A tanulmány két fő felfedezést kínál: az egyik, hogy ha létezik a tetraéder egy pontjának izogonális konjugáltja, akkor az egyedi. A másik, hogy az izogonálisan konjugált pontpárok talppontjai egy gömbön fekszenek (7b. ábra).
Izogonálisan konjugált pontpár szerkesztése: Legyen adott egy általános referencia tetraéder $ABCD$ és egy pont P, melynek létezik izogonális pontpárja. Két szomszédos oldallap, például az ABC és ACD oldallapok által létrehozott szögfelező sík azon pontok halmaza, amelynek pontjai egyenlő távolságra vannak az oldallapoktól, jelöljük ezt a szögfelező síkot mint b_{AC} (a 7a. ábrán zöld sík). Tükrözzük a P pontot a b_{AC} sík szerint, jelöljük a képet mint P_{AC}. Analóg módon tükrözzük a P pontot b_{AB} szögfelező sík (az ábrán sárga) szerint, így kapjuk a P_{AB} képet, majd b_{BC} szögfelező sík (az ábrán kék) szerint, és így tovább. A képek és a megfelelő élek alkotta síkok egy pontban metszik egymást, vagyis $P_{AB}AB \cap P_{BC}BC \cap P_{AC}AC \cap \cdots = P_i$, mely a P pont izogonális konjugáltja (7a. ábra).

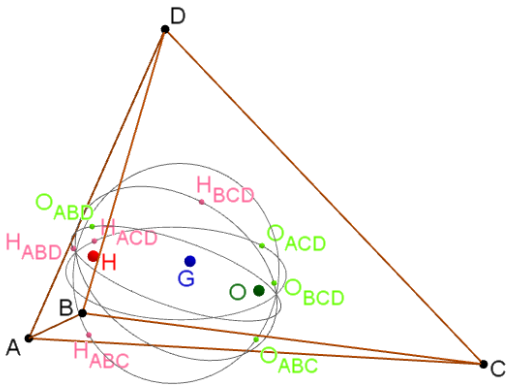


(a) P pont izogonális konjugáltja P_i.

(b) Izogonálisan konjugált pontpárok talppontjai egy gömbön fekszenek.

7. ábra. Izogonálisan konjugált pontpárok és talppontjaik.

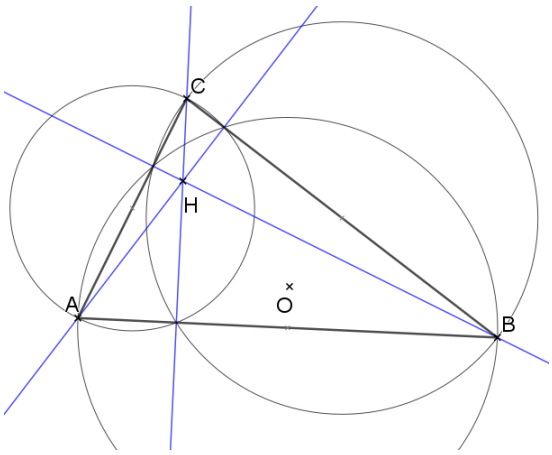
Egy általános tetraéder körülírt gömbjének a középpontjának és létező izogonálisan konjugált pontpárjának talppontjai tehát az előzőek alapján egy gömbre illeszkednek (8. ábra), mely lehetne a Feuerbach kör egy újabb térbeli analógiája. A tizenkét-pontos gömbről, mint Feuerbach gömbről Egerváry Jenő (Egerváry, 1950, o. 5) így ír: *"már meglehetősen régen felismerték, hogy a Feuerbach-körnek (vagy kilenc-pontos körnek) nincs megfelelője egy általános tetraéder esetében, de ha a tetraéder ortocentrikus, akkor két gömb létezik (a „tizenkét-pontos" gömbök), amelyek mindegyike a Feuerbach-kör háromdimenziós kiterjesztésének tekinthető."* Ez a jellemzés eltér az itt leírt jellemzéstől. További tanulmány a több dimenziós tér szimplexéhez kötődő Euler egyenes, Monge pont és Feuerbach gömb kapcsolatairól (Leopold & Martini, 2018).



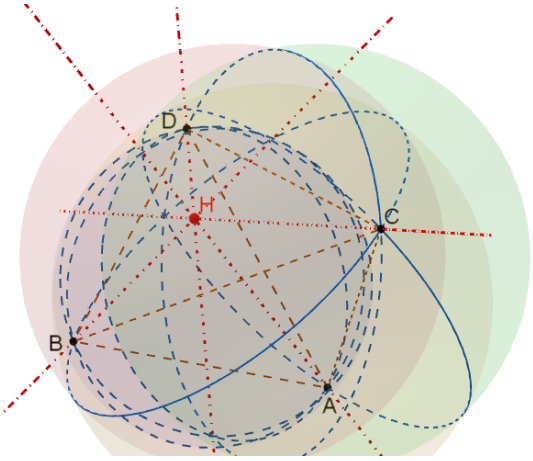
8. ábra. Körülírt gömb középpontja O és izogonális pontpárja H.

MAGASSÁGPONT MINT HATVÁNYPONT

A háromszög magasságpontja megegyezik az oldalakra emelt Thalész körök hatványpontjával is (9a. ábra). Az előző fejezetben említett tanulmányban szerepel az a bizonyítás is, miszerint a tetraéder körülírt gömbjének középpontjának izogonális konjugáltja megegyezik azon gömbök hatványpontjával, amelyek a lapháromszögek fölé emelt "Thalész gömbök". Az ABC oldallap fölé emelt "Thalész gömb" középpontja és sugara az ABC háromszög köré írható körének középpontjával és sugarával egyezik meg (9b. ábra).



(a) Magasságpont megegyezik a Thalész körök hatványpontjával.

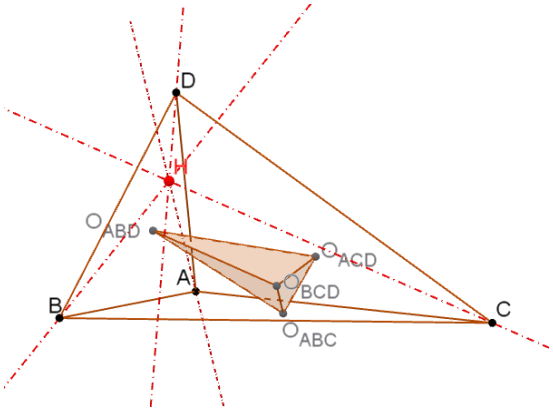


(b) Oldallapok "Thalész gömbjeinek" hatványpontja.

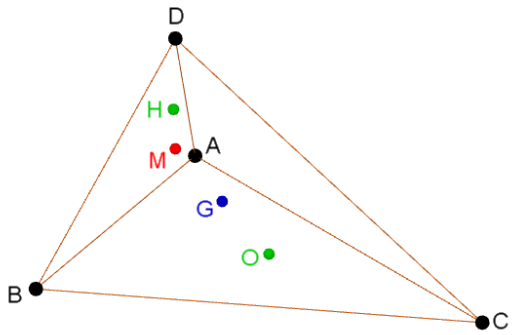
9. ábra. O izogonális konjugáltja mint hatványpont.

MAGASSÁGPONT A KÖZÉPVONALAK SEGÍTSÉGÉVEL

Észrevettünk még egy érdekességet. A háromszög magasságpontja egybeesik azzal a ponttal is, amelyet a csúcsokból a szemközti középvonalakra húzott merőlegesek metszeteként kapunk. A háromszög középvonalai az oldalakra emelt Thalész körök középpontjait összekötő egyenesekként értelmezhetőek. A hatványvonalak tulajdonságából adódik, hogy azok merőlegesek a körök középpontjait összekötő egyenesre, tehát a középvonalra, így egybeesnek a magasságvonalakkal. Ezt a tulajdonságot átvezetve tetraéderre, tudatában az előző ismereteknek már könnyű belátni, hogy az oldallapok köréírt körének középpontjai alkotta síkokra a szemközti csúcsból húzott merőlegesek egybeesnek a fent leírt Thalész gömbök hatványpontjával. Az ilyen értelemben vett "*középsíkok*" által definiált *"magasságvonalak"* tehát az előző fejezetben leírt hatványponttal és így a körülírt gömb izogonálisan konjugált párjával is egybeesik (10a. ábra).



(a) Körülírt körök középpontjai alkotta "középsíkok" által definiált "magasságvonalak" *H* metszéspontja.



(b) Az előzőek alapján szerkesztett *H* pont nem egyezik meg a Monge ponttal ortocentrikus tetraéder esetén sem.

10. ábra

BEFEJEZÉS

Az utolsó három alfejezetben leírt, térbeli magasságpont-analógia azonos pontot eredményez. Könnyen belátható, hogy ez a pont nem egyezik meg a Monge ponttal még ortocentrikus tetraéder esetén sem, és nem illeszkedik a tetraéder Euler egyenesére sem (10b. ábra). Felvetődik a kérdés, hogy létezik-e esetleg alternatív kapcsolat e pont és a Monge pont ill. az Euler egyenes között.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Boutin, A. (1890). Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d´un triangle. *Journal de Mathématiques spéciales*.

Casey, J. (1893). *A Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Circle, and Conic Sections*. Dublin: Hodges, Figgis, & Co.

Cheung, T. K. H. & Ko, H. C. (2018). Old and new generalizations of classical triangle centres to tetrahedra. *Hang Lung Mathematics Awards*.

Egerváry, E. (1950). On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex. *Acta Mathematica Hungarica*, 1(1), 5–16. https://doi.org/10.1007/BF02022548

Hadjisavvas, N., Hiriart-Urruty, J.-B., & Laurent, P.-J. (2016). A Characterization by Optimization of the Monge Point of a Tetrahedron. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0684-6*Journal of Optimization Theory and Applications*. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0684-6

Havlicek, H. & Weiß, G. (2003). Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadratic Forms. *The American Mathematical Monthly*, 110(8). https://doi.org/10.2307/3647851

Herrera, B. & Tran, Q. H. (2022). An analogue of Thébault's theorem linking the Radical Center of four spheres with the Insphere and the Monge Point of a Tetrahedron. *International Electronic Journal of Geometry*, 15, 75–78. https://doi.org/10.36890/iejg.957190

Horváth, J. & Németh, L. (1996). Ideális szimplexek a hiperbolikus térben. *BDTK Tudományos Közleményei X. Természettudományok 5.*

Leopold, U. & Martini, H. (2018). Monge points, Euler Lines, and Feuerbach Spheres in Minkowski Spaces. In *Discrete Geometry and Symmetry* (pp. 235–255).: https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-78434-2_13Springer International Publishing.

Mandart, H. (1893). Sur l´hyperbole de Feuerbach. *Mathesis*.

Molnár, F. (1958). A tetraéder nevezetes pontjairól. *Középiskolai matematikai lapok*, 2.

Yu, C. K. & Lai, N. H. (2023). Generalising orthocentres of triangles to simplices as the isogonal conjugates of the circumcentres. *Hang Lung Mathematics Awards*.