https://doi.org/10.36007/5093.2024.424

SPECIÁLIS HALMAZOK MAXIMÁLIS ASZIMPTOTIKUS SŰRŰSÉGŰ RÉSZHALMAZAI SUBSETS OF SPECIAL SETS WITH MAXIMUM ASYMPTOTIC DENSITY

Dániel TÓTH[1]

ABSTRACT

The asymptotic density d, defined by $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A\cap[1,n]|$, *is a classical tool for measuring the size of subsets of* $\mathbb{N}$. *However, it is not defined for all subsets of* $\mathbb{N}$. *In this article, we investigate two finitely additive measures that extend asymptotic density and are defined for all subsets of* $\mathbb{N}$. *The density measures we consider, for a given subset* $A \subseteq \mathbb{N}$, *assign the largest asymptotic density possessed by subsets of A, denoted by* $\underline{\underline{d}}(A) = \sup\{d(B) \mid B \subseteq A, \underline{d}(B) = \overline{d}(B)\}$, *and the smallest asymptotic density possessed by supersets of A, denoted by* $\overline{\overline{d}}(A) = \inf\{d(C) \mid C \supseteq A, \underline{d}(C) = \overline{d}(C)\}$. *We study the range of the density measures* $\underline{\underline{d}}$, $\underline{d}$, $\overline{d}$, *and* $\overline{\overline{d}}$. *Additionally, we construct sets with a specific form such that the values of* $\underline{\underline{d}}$, $\underline{d}$, $\overline{d}$, *and* $\overline{\overline{d}}$ *can be assigned arbitrarily. From this result, it follows that there exist sets with arbitrarily large lower asymptotic density, strictly less than one, that contain no subset with positive asymptotic density.*

KEYWORDS

density measures, asymptotic density, Pólya density

BEVEZETŐ

Legyen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ a természetes számok halmaza. Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$. Az A halmaz alsó, illetve felső aszimptotikus sűrűségét így definiáljuk:

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}, \qquad \overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n},$$

ahol az $A(n) = |A \cap [1, n]|$. Ha $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$, akkor az A halmaz rendelkezik aszimptotikus sűrűséggel, amit $d(A)$-val jelölünk [6].
Jelöljük az aszimptotikus sűrűséggel rendelkező halmazok halmazát a következő módon:

$$\mathcal{D} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \underline{d}(A) = \overline{d}(A)\}.$$

A végesen additív $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ mértéket sűrűségmértéknek nevezzük, ha $\mu(A) = d(A)$ minden $A \in \mathcal{D}$ esetén. Legyen $\hat{\mathcal{D}}$ a sűrűségmértékek halmaza.

[1]Mgr. Tóth Dániel, Selye János Egyetem, GIK, Matematika Tanszék, toth.daniel@student.ujs.sk

Nem minden halmaz rendelkezik aszimptotikus sűrűséggel, ezért foglalkozunk olyan sűrűségmértékekkel, amelyek kiterjesztik azt. Kérdés, hogy létezhet-e egy $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \notin \mathcal{D}$ halmaznak olyan részhalmaza, amely rendelkezik aszimptotikus sűrűséggel? Mekkora az a maximális aszimptotikus sűrűség, amellyel rendelkezik a halmaz legalább egy részhalmaza? Jelöljük ezt a mértéket a következőképpen:

$$\underline{\underline{d}}(A) = \sup\{d(B); B \subseteq A, B \in \mathcal{D}\}.$$

A definícióból természetesen következik, hogy ennek a mértéknek van felső párja is, amely megadja, hogy mekkora lehet az a minimális aszimptotikus sűrűség, amellyel rendelkező a halmazt tartalmazó halmaz létezik. Ezt a mértéket a következő módon jelöljük:

$$\overline{\overline{d}}(A) = \inf\{d(C); C \supseteq A, C \in \mathcal{D}\}.$$

Megjegyzés Ha $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$, akkor $\underline{\underline{d}}(A) = \underline{d}(A) = \overline{d}(A) = \overline{\overline{d}}(A)$.

Az üres halmaz minden halmaz részhalmaza, tehát minden halmaznak van legalább $d(\emptyset) = 0$ aszimptotikus sűrűségű részhalmaza. Érdekesebb kérdés, hogy milyen halmazoknak van pozitív aszimptotikus sűrűségű részhalamaza? Van-e összefüggés az alsó és felső aszimptotikus sűrűség és a $\underline{\underline{d}}, \overline{\overline{d}}$ értékei között? Például ha egy halmaz $\underline{d}$ értéke magas, tehát gazdag halmaznak tekinthetjük, ebből következik-e, hogy van pozitív aszimptotikus sűrűségű részhalmaza? Hasonlóan, ha egy halmaz $\overline{d}$ értéke alacsony, tehát szegény halmaznak tekinthetjük, ebből következik-e, hogy van olyan egynél kisebb (tehát nem $d(\mathbb{N})$) aszimptotikus sűrűségű halmaz, ami tartalmazza azt? A cikk eredményei ezekre a kérdésekre adnak választ.
Adott $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ valós számokhoz definiálhatunk olyan $A \subset \mathbb{N}$ halmazt, hogy teljesül $\underline{d}(A) = \alpha$ és $\overline{d}(A) = \beta$. Ennek egyik legegyszerűbb módja, ha $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}((a_{2n-1}, a_{2n}] \cap \mathbb{N})$, ahol $\{a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots\} \subset \mathbb{N}$ sorozatot úgy definiáljuk, hogy $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{A(a_{2n-1})}{a_{2n-1}} = \alpha$ és $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{A(a_{2n})}{a_{2n}} = \beta$ legyen. Ezt általánosítva, ebben a cikkben olyan alakú halmazokkal foglalkozunk, amelyek $\underline{\underline{d}}$, $\underline{d}$, $\overline{d}$ és $\overline{\overline{d}}$ mértékei szabadon megválaszthatók, így vizsgálva a sűrűségmértékek értéktartományait.
Tekintsük a következő ismert sűrűségmértékeket:

$$d^*(A) = \sup\{\mu(A) \mid \mu \in \hat{\mathcal{D}}\},$$

$$\overline{d}_p(A) = \lim_{\theta\to 1^-} \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n) - A(\theta n)}{n - \theta n},$$

$$\overline{d}_\infty(A) = \lim_{\alpha\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{A_\alpha(n)}{\mathbb{N}_\alpha(n)}, \text{ahol } A_\alpha(n) = \sum_{\substack{k\in A\\ k\leq n}} k^\alpha.$$

Analóg módon definiálhatóak a $d_*(A), \underline{d_\infty}(A), \underline{d_P}(A)$ sűrűségmértékek is.
Letavaj, Mišík, Pólya, Sleziak és Ziman eredményei alapján bármely $A \subseteq \mathbb{N}$ esetén $\overline{\overline{d}}(A) = d^*(A) = \overline{d_\infty}(A) = \overline{d_P}(A)$, valamint $\underline{\underline{d}}(A) = d_*(A) = \underline{d_\infty}(A) = \underline{d_P}(A)$ [3, 4, 5].

EREDMÉNYEK

Legyen $L, H \in \mathcal{D}$ olyanok, hogy $L \subseteq H$. Legyen

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((a_{2n-1}, a_{2n}] \cap H) \cup ((a_{2n}, a_{2n+1}] \cap L),$$

ahol $a_1 < a_2 < \ldots$ nemnegatív egész számsorozat [2].

1. Példa Válasszuk az L, H halmazokat és az (a_n) sorozatot a következőképpen:

$$H = \mathbb{N}, \quad L = \emptyset, \quad a_{2n-1} = 10^{n-1} - 1, \quad a_{2n} = 2 \cdot 10^{n-1} - 1.$$

Ekkor $A = \{1, 10, 11, \ldots, 18, 19, 100, 101, \ldots, 198, 199, 1000, 1001, \ldots\}$, vagyis azon természetes számok halmaza, amelyek első számjegye 1. Ez a halmaz egy klasszikus példája az aszimptotikus sűrűséggel nem rendelkező halmazoknak, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(a_{2n-1})}{a_{2n-1}} = \frac{1}{9}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(a_{2n})}{a_{2n}} = \frac{5}{9}$.

1. Lemma Az A, L, H halmazokra teljesül, hogy

$$0 \le d(L) \le \underline{\underline{d}}(A) \le \underline{d}(A) \le \overline{d}(A) \le \overline{\overline{d}}(A) \le d(H) \le 1.$$

Bizonyítás. Ha $B \subseteq A \subseteq C \subseteq \mathbb{N}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $B(n) \le A(n) \le C(n)$, ezért $\underline{\underline{d}}(A) \le \underline{d}(A) \le \overline{d}(A) \le \overline{\overline{d}}(A)$.
Legyen

$$B' = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(a_{2n-1}, a_{2n}] \cap L] \cup [(a_{2n}, a_{2n+1}] \cap L] \,.$$

Nyilván $B' \subseteq A$ és $d(B') = d(L)$, ezért $d(L) \le \underline{\underline{d}}(A)$.
Legyen

$$C' = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(a_{2n-1}, a_{2n}] \cap H] \cup [(a_{2n}, a_{2n+1}] \cap H] \,.$$

Nyilván $C' \supseteq A$ és $d(C') = d(H)$, ezért $\underline{\underline{d}}(A) \le d(H)$ [1]. □

Megjegyzés Ha $d(L) = d(H)$, akkor $A \in \mathcal{D}$ és $d(A) = d(L)$.

2. Lemma Az A halmazra teljesül, hogy $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{A(a_{2n+1})}{a_{2n+1}}$, továbbá $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{A(a_{2n})}{a_{2n}}$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha = d(L), \delta = d(H)$. Legyen $(b_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tetszőleges sorozat. Ekkor minden b_k elemhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $b_k \in (a_{2n-1}, a_{2n}] \cup (a_{2n}, a_{2n+1}]$.
Ekkor legalább az egyik eset teljesül, hogy

- 1. eset. A (b_k) sorozatnak van olyan (b_i) részsorozata, hogy minden b_i elemhez létezik olyan $n_i \in \mathbb{N}$, hogy $b_i \in (a_{2n_i-1}, a_{2n_i}]$. Ekkor

$$\lim_{i\to\infty} \frac{A(b_i)}{b_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{A(a_{2n_i-1}) + (b_i - a_{2n_i-1})d(H)}{b_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{b_i}(A(a_{2n_i-1}) - a_{2n_i-1}\delta) + \delta.$$

Mivel $\lim\limits_{n_i\to\infty} (A(a_{2n_i-1}) - a_{2n_i-1}\delta) \le 0$, valamint $a_{2n_i-1} < b_i \le a_{2n_i}$, ezért

$$\liminf_{n_i\to\infty} \frac{A(a_{2n_i-1})}{a_{2n_i-1}} = \liminf_{n_i\to\infty} \frac{A(a_{2n_i+1})}{a_{2n_i+1}} \le \liminf_{i\to\infty} \frac{A(b_i)}{b_i} \le \limsup_{i\to\infty} \frac{A(b_i)}{b_i} \le \limsup_{n_i\to\infty} \frac{A(a_{2n_i})}{a_{2n_i}}.$$

- 2. eset. A (b_k) sorozatnak van olyan (b_i) részsorozata, hogy minden b_i elemhez létezik olyan $n_i \in \mathbb{N}$, hogy $b_i \in (a_{2n_i}, a_{2n_i+1}]$. Ekkor
$$\lim_{i\to\infty} \frac{A(b_i)}{b_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{A(a_{2n_i}) + (b_i - a_{2n_i})d(L)}{b_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{b_i}(A(a_{2n_i}) - a_{2n_i}\alpha) + \alpha.$$
Mivel $\lim_{n_i\to\infty}(A(a_{2n_i}) - a_{2n_i}\alpha) \geq 0$, valamint $a_{2n_i} < b_i \leq a_{2n_i+1}$, ezért
$$\liminf_{n_i\to\infty} \frac{A(a_{2n_i+1})}{a_{2n_i+1}} \leq \liminf_{i\to\infty} \frac{A(b_i)}{b_i} \leq \limsup_{i\to\infty} \frac{A(b_i)}{b_i} \leq \limsup_{n_i\to\infty} \frac{A(a_{2n_i})}{a_{2n_i}}.$$

Mivel $(b_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tetszőleges sorozat, ezért érvényes, hogy $\liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(a_{2n+1})}{a_{2n+1}}$, továbbá $\limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(a_{2n})}{a_{2n}}$. □

1. Definíció Legyen $a_1 < a_2 < \ldots$ sorozat olyan, hogy az általa definiált A halmazra teljesül, hogy
$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(a_{2n+1})}{a_{2n+1}},$$
továbbá
$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(a_{2n})}{a_{2n}}.$$
Legyen $\mathcal{A}$ az ilyen A halmazok halmaza.

3. Lemma Legyen $A \in \mathcal{A}$ és $A \notin \mathcal{D}$. Ekkor $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} > 1$.

Bizonyítás. Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1$, akkor
$$1 \leq \frac{\overline{d}(A)}{\underline{d}(A)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{A(a_{2n})}{a_{2n}}}{\frac{A(a_{2n+1})}{a_{2n+1}}} \cdot \frac{\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}}{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}} \leq \frac{\underline{d}(A)}{\overline{d}(A)} \leq 1,$$
amiből következik, hogy $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$, tehát $A \in \mathcal{D}$. □

1. Tétel Legyen $A \in \mathcal{A}$ és $A \notin \mathcal{D}$. Ekkor $\underline{\underline{d}}(A) = d(L)$.

Bizonyítás. Legyen $B \subseteq A$ olyan, hogy $d(B) = \underline{\underline{d}}(A)$. Legyen $\theta = \frac{d(B)}{\overline{d}(A)}$. Mivel $B \in \mathcal{D}$, ezért az $(a_{2n}), (a_{2n+1})$ sorozatokra teljesül, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{B(a_{2n})}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{B(a_{2n+1})}{a_{2n+1}},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta A(a_{2n})}{a_{2n}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\theta A(a_{2n}) + A(a_{2n+1}) - A(a_{2n})}{a_{2n+1}},$$
$$\theta\overline{d}(A) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\theta A(a_{2n}) + (a_{2n+1} - a_{2n})d(L)}{a_{2n+1}},$$
$$\theta\overline{d}(A) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\theta\overline{d}(A) + d(L) - \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}d(L),$$
$$\theta\overline{d}(A)\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right) \leq d(L)\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right).$$

A 3. Lemma alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \neq 1$. Osztva mindkét oldalt kapjuk, hogy $\theta\overline{d}(A) = d(B) \leq d(L)$. Az 1. Lemma szerint $d(L) \leq \underline{\underline{d}}(A)$. Ezek alapján $d(L) \leq \underline{\underline{d}}(A) \leq d(L)$, vagyis $\underline{\underline{d}}(A) = d(L)$. $\square$

1. Következmény Legyen $A \in \mathcal{A}$ és $A \notin \mathcal{D}$. Ekkor $\overline{\overline{d}}(A) = d(H)$.

Bizonyítás. Az $\bar{A} = \mathbb{N} \setminus A$ leírható az L és a H komplementerével:

$$\bar{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[(a_{2n-1}, a_{2n}] \cap \bar{H}\Big] \cup \Big[(a_{2n}, a_{2n+1}] \cap \bar{L}\Big].$$

Mivel $d(L) \leq d(H)$, ezért $d(\bar{H}) \leq d(\bar{L})$. Legyen

$$b_n = \begin{cases} a_{n-1}, & \text{ha } n > 1; \\ 0, & \text{ha } n \leq 1. \end{cases}$$

Ekkor

$$\bar{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[(b_{2n-1}, b_{2n}] \cap \bar{L}\Big] \cup \Big[(b_{2n}, b_{2n+1}] \cap \bar{H}\Big].$$

Ebből látható, hogy $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
Legyen $\bar{C} \subseteq \bar{A}$ olyan, hogy $\underline{\underline{d}}(\bar{A}) = d(\bar{C})$, vagyis $\bar{C}$ egy olyan részhalmaz aminek az aszimptotikus sűrűsége maximális. Az 1. Tétel szerint $\underline{\underline{d}}(\bar{A}) = d(\bar{C}) = d(\bar{H})$. Tetszőleges halmazokra igaz, hogy

$$\bar{C} \subseteq \bar{A} \Leftrightarrow A \subseteq C.$$

Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $C^* \supseteq A$, $C^* \in \mathcal{D}$, hogy $d(C^*) < d(C)$.
Ekkor $\bar{C}^* \in \mathcal{D}$ és $\bar{C}^* \subseteq \bar{A}$, valamint $\underline{\underline{d}}(\bar{A}) = d(\bar{C}) < d(\bar{C}^*)$, ami ellentmondás. Ebből következik, hogy nincs olyan $C^* \supseteq A$ halmaz, aminek az aszimptotikus sűrűsége kisebb lenne, mint $d(C)$, tehát $\overline{\overline{d}}(A) = d(C) = d(H)$. $\square$

4. Lemma Legyen $\delta \in [0, 1]$, $H \subseteq \mathbb{N}$ olyan halmaz, hogy $d(H) = \delta$, továbbá legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és $A \subseteq \mathbb{N}$ olyan, hogy $A \cap (k, \infty) = H \cap (k, \infty)$. Ekkor tetszőleges $h \in [0, \delta)$ számhoz létezik olyan $n > k$, hogy $\frac{A(n)}{n} \geq h$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem létezik ilyen n. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(k) - H(k)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{H(n)}{n} \leq h < \delta.$$

Azonban mivel $d(H) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{H(n)}{n} = \delta$, ezért ellentmondáshoz jutunk. Ezért léteznie kell olyan $n > k$ értéknek, amelyre $\frac{A(n)}{n} \geq h$ teljesül. $\square$

5. Lemma Legyen $\alpha \in [0, 1]$, $L \subseteq \mathbb{N}$ olyan halmaz, hogy $d(L) = \alpha$, továbbá legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és $A \subseteq \mathbb{N}$ olyan, hogy $A \cap (k, \infty) = L \cap (k, \infty)$. Ekkor tetszőleges $l \in (\alpha, 1]$ számhoz létezik olyan $n > k$, hogy $\frac{A(n)}{n} \leq l$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem létezik ilyen n. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{A(k)-L(k)}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{L(n)}{n}\geq l>\alpha.$$

Azonban mivel $d(L)=\lim_{n\to\infty}\frac{L(n)}{n}=\alpha$, ezért ellentmondáshoz jutunk. Ezért léteznie kell olyan $n>k$ értéknek, amelyre $\frac{A(n)}{n}\leq l$ teljesül. □

2. Tétel Tetszőleges $0\leq\alpha\leq\beta<\gamma\leq\delta\leq 1$ valós számokhoz létezik olyan $A\subseteq\mathbb{N}$ halmaz, hogy $\underline{\underline{d}}(A)=\alpha$, $\underline{d}(A)=\beta$, $\overline{d}(A)=\gamma$, $\overline{\overline{d}}(A)=\delta$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $L,H\subseteq\mathbb{N}$ halmaz, valamint $a_1<a_2<\ldots$ nemnegatív sorozat, hogy az $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}((a_{2n-1},a_{2n}]\cap H)\cup((a_{2n},a_{2n+1}]\cap L)\subset\mathbb{N}$ halmazra teljesülnek az elvárt feltételek. A $\underline{\underline{d}}(A)=\alpha$ és $\overline{\overline{d}}(A)=\delta$ feltételek az 1. Tétel és az 1. Következmény alapján pontosan akkor teljesülnek, ha $d(L)=\alpha$ és $d(H)=\delta$. Ennek megfelelően válasszuk a következő halmazokat:

$$H=\{h_1<h_2<\ldots\}=\left\{\left\lfloor\frac{k}{\delta}\right\rfloor:k\in\mathbb{N}\right\},\quad L=\left\{h_{\lfloor k\frac{\delta}{\alpha}\rfloor}:k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Legyen $\epsilon:\mathbb{N}\to(0,\frac{\gamma-\beta}{2})$ egy olyan függvény, hogy $\lim_{n\to\infty}\epsilon(n)=0$.
Válasszuk az $a_1<a_2<\ldots$ nemnegatív számsorozat elemeit úgy, hogy

- legyen $a_1=1$, ekkor $\frac{A(a_1)}{a_1}=0$.
- Legyen a_{2n} a legkisebb olyan szám, amelyre $\frac{A(a_{2n})}{a_{2n}}\geq\gamma-\epsilon(n)$. Mivel $\gamma-\epsilon(n)<\gamma\leq\delta$, ezért a 4. Lemma szerint létezik ilyen a_{2n}. Mivel a_{2n} a legkisebb ilyen szám, ezért $\frac{A(a_{2n}-1)}{a_{2n}-1}<\gamma-\epsilon(n)$, így

  $$\gamma-\epsilon(n)\leq\frac{A(a_{2n})}{a_{2n}}\leq(\gamma-\epsilon(n))\frac{a_{2n}-1}{a_{2n}}\frac{A(a_{2n})}{A(a_{2n}-1)}.$$

  Ebből következik, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{A(a_{2n})}{a_{2n}}=\gamma$.
- Legyen a_{2n+1} a legkisebb olyan szám, amelyre $\frac{A(a_{2n+1})}{a_{2n+1}}\leq\beta+\epsilon(n)$. Mivel $\beta+\epsilon(n)>\beta\geq\alpha$, ezért az 5. Lemma szerint létezik ilyen a_{2n+1}. Mivel a_{2n+1} a legkisebb ilyen szám, ezért $\frac{A(a_{2n+1}-1)}{a_{2n+1}-1}>\beta+\epsilon(n)$, így

  $$\beta+\epsilon(n)\geq\frac{A(a_{2n+1})}{a_{2n+1}}\geq(\beta+\epsilon(n))\frac{a_{2n+1}-1}{a_{2n+1}}\frac{A(a_{2n+1})}{A(a_{2n+1}-1)}.$$

  Ebből következik, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{A(a_{2n+1})}{a_{2n+1}}=\beta$.

A 2. Lemma szerint $\underline{d}(A)=\liminf_{n\to\infty}\frac{A(a_{2n+1})}{a_{2n+1}}$ és $\overline{d}(A)=\limsup_{n\to\infty}\frac{A(a_{2n})}{a_{2n}}$, ezért teljesül, hogy $\underline{d}(A)=\beta$ és $\overline{d}(A)=\gamma$. □

BEFEJEZÉS

Legyen $a_1 < a_2 < \ldots$ nemnegatív egész számsorozat, olyan, hogy

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((a_{2n-1}, a_{2n}] \cap \mathbb{N}) \cup ((a_{2n}, a_{2n+1}] \cap \emptyset) = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((a_{2n-1}, a_{2n}] \cap \mathbb{N}) \notin \mathcal{D}.$$

Vizsgáljuk meg ezeket a halmazokat a bizonyított tételek alapján. Az 1. Példában bemutatott halmaz ilyen alakú.

Az 1. Tétel és az 1. Következmény szerint pontosan ekkor $\underline{\underline{d}}(A) = 0$ és $\overline{\overline{d}}(A) = 1$.

A 2. Tétel szerint tetszőleges $\alpha = 0 \leq \beta < \gamma \leq \delta = 1$ valós számokhoz létezik olyan $A \subseteq \mathbb{N}$ halmaz, hogy $\underline{\underline{d}}(A) = 0$, $\underline{d}(A) = \beta$, $\overline{d}(A) = \gamma$, $\overline{\overline{d}}(A) = 1$. Ebből következik, hogy tetszőleges $1 \geq \epsilon > 0$ esetén létezik olyan $A \subset \mathbb{N}$, hogy $\underline{d}(A) = 1 - \epsilon$ és $\underline{\underline{d}}(A) = 0$. Azt a halmazt amelynek az alsó aszimptotikus sűrűsége közel van az egyhez, gazdagnak tekinthetjük. Az állítás szerint konstruálható olyan tetszőlegesen gazdag, aszimptotikus sűrűséggel nem rendelkező halmaz, amelyenek nincs pozitív aszimptotikus sűrűségű részhalmaza.

Hasonlóan tetszőleges $1 \geq \epsilon > 0$ esetén létezik olyan $A \subset \mathbb{N}$, hogy $\overline{d}(A) = \epsilon$ és $\overline{\overline{d}}(A) = 1$. Azt a halmazt amelynek az felső aszimptotikus sűrűsége nulla közeli, szegénynek tekinthetjük. Az állítás szerint konstruálható olyan tetszőlegesen szegény, aszimptotikus sűrűséggel nem rendelkező halmaz, amelyet csak olyan aszimptotikus sűrűséggel rendelkező halmaz tartalmaz, melynek aszimptotikus sűrűsége 1, tehát a lehető legnagyobb.

A $\underline{\underline{d}}$ és $\overline{\overline{d}}$ kiterjesztik az aszimptotikus sűrűséget. Ha $A \in \mathcal{D}$, akkor $\underline{\underline{d}}(A) = \underline{d}(A) = \overline{d}(A) = \overline{\overline{d}}(A)$. Ha $A \notin \mathcal{D}$, akkor a 2. Tétel alapján $0 \leq \underline{\underline{d}}(A) \leq \underline{d}(A) < \overline{d}(A) \leq \overline{\overline{d}}(A) \leq 1$ egyenlőtlenségeken kívül a mértékek értékeire nincs más megkötés.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] Grekos, G., Mišík, L., and Tóth, J. T. (2010). Density sets of sets of positive integers. *Journal of Number Theory*, 130(6):1399–1407.

[2] Grekos, G., Šalát, T., and Tomanová, J. (2003). Gaps and densities. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 46 (94)(3/4):121–141.

[3] Letavaj, P., Mišík, L., and Sleziak, M. (2015). Extreme points of the set of density measures. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 423(2):1150–1165.

[4] Pólya, G. (1929). Untersuchungen über lücken und singularitäten von potenzreihen. *Mathematische Zeitschrift*, 29:549–640.

[5] Sleziak, M. and Ziman, M. (2009). Range of density measures. *Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis*, 17(1):33–50.

[6] Tóth, J. T. (2006). Teória r-hustých množín a jej aplikácie v školskej matematike. *Eruditio - educatio*, 1(3):31–94.