https://doi.org/10.36007/5093.2024.407

ADOTT PONT KÉT KÚPSZELETRE VONATKOZTATOTT POLÁRISAIRÓL
ABOUT THE POLARS OF A GIVEN POINT WITH RESPECT TO TWO CONIC SECTIONS

Ágnes BAZSO[1]

ABSTRACT
We describe a methodological approach to investigating the geometric locus of the intersections of the polars of a point with respect to two conic sections, where the given point lies on a general line. We prove the conjecture regarding this geometric locus in three different ways: using analytic geometry, analytic projective geometry, and theorems and principles of projective geometry.

KEYWORDS
methodological approach, conic sections, pole and polar, locus, analytic geometry, projective geometry

BEVEZETÉS ÉS ALAPFOGALMAK

Az analitikus geometria minden középiskolát végzett diák számára ismerős. Egy szlovákiai középiskolában érettségizett diák az elvárásoknak megfelelően egy planimetriai feladat megoldása során képes *"megfelelően megválasztani a koordináta-rendszert és algebrailag feldolgozni a feladatot"*, valamint ismerik a kör egyenletét: fel tudják írni az egyenletet ha adott a kör három különböző pontja, vagy ha ismerik a kör középpontjának koordinátáit és a sugarának nagyságát. Algebrai úton meg tudják határozni egy kör és egy egyenes kölcsönös helyzetét. Kúpszeletekkel a tanulók szinte csak főiskolai szinten találkoznak, főleg azok a hallgatók, akik geometriával kapcsolatos szakot választanak, pl. számítógépes grafika, képfeldolgozás, robotika, geometria vagy topológia. Egy konrét problematika bemutatásán keresztül szeretnénk szemléltetni, hogy érdekes lehet a projektív geometria alapjaival való megismerkedés középiskolai szinten is, akár motivációként pályaválasztás előtt állók számára.

Munkánk során számtalanszor felhasználjuk a Geogebra [1] program adta lehetőségeket, mellyel interaktívan tudunk szemléltetni szerkesztéseket, geometriai bizonyításokat, tulajdonságokat vagy ponthalmazokat adott tulajdonságokkal. Ilyen szerkesztések során, ahol körre vonatkoztatott pólusok és polárisok tulajdonságait vizsgáljuk, merülhet fel egy sejtés, melyet a 3. Tételben, majd általánosítva a 4. Tételben fogalmazhatunk meg. Ezen tételek ismertek és bizonyítottak, értekezésünkben az utóbbi tétel több szempontból történő bizonyítási lehetőségeit vizsgáljuk. A tétel kúpszeletekre (speciális esetben körre) vonatkoztatott pólusokkal és polárisokkal foglalkozik, ezért a tétel leírása és bizonyítása előtt ismertetjük ezek definícióját és tulajdonságait.

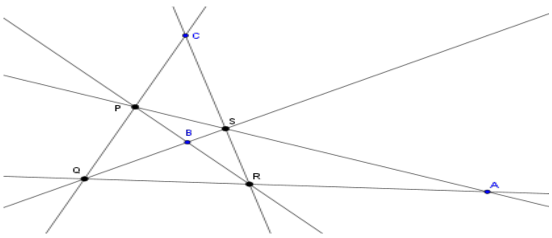
[1]Mgr. Bazso Ágnes, Selye János Egyetem, GIK, Matematika Tanszék, 134670@student.ujs.sk

Kúpszeletre vonatkoztatott pólus és poláris

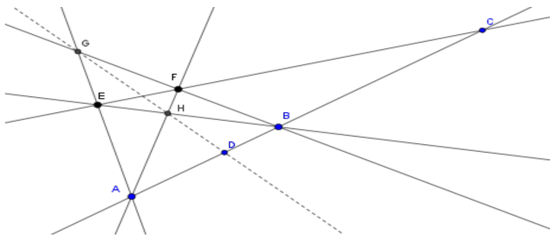
A definíciókat és tulajdonságokat a [2], [3] és [4] könyvek ill. tanulmányok alapján válogattuk össze, a bizonyítások és bővebb leírások ezekben találhatóak. A pólus-poláris kapcsolat bemutatása előtt ismernünk kell a teljes négyszög és a harmonikus pontnégyes definícióját:

1. Definíció (*Teljes négyszög*) Ha valamely egy projektív síkban levő 4 pontot (jelöljük P, Q, R, S) páronként összesen 6 különböző egyenes köt össze, akkor ezt a négy pontot egy **teljes négyszög** *csúcspontjai*nak, a 6 egyenest e teljes négyszög *oldalai*nak, és az oldalak azon metszéspontjait, amelyek nem csúcspontok, *átlóspont*oknak nevezzük. Az 1a. ábrán látható $PQRS$ négyszög oldalai PS, QS, RS, QR, RP, PQ és átlóspontjai A, B, C.

2. Definíció (*Harmonikus pontnégyes*) Egy projektív síkon az A, B, C, D kollineáris pontokról azt mondjuk, hogy **harmonikus pontnégyest** alkotnak, ha van olyan teljes négyszög, melynek A és B csúcsai, C átlóspontja, és D a két további átlóspontra illeszkedő egyenes és az AB oldal metszéspontja. A D és C pontot az A és B pontokra vonatkozó *harmonikus társak*nak nevezzük (lásd 1b. ábra).



(a) Teljes négyszög



(b) $ABFE$ teljes négyszög $ABCD$ harmonikus pontnégyes felett

1. ábra

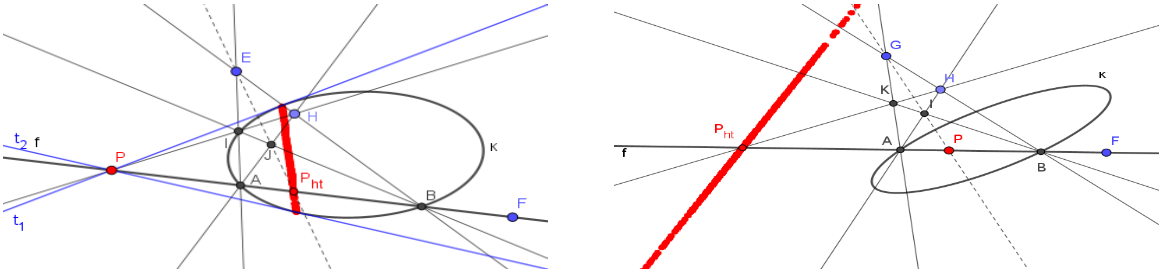
Adott tetszőleges A, B és C kollineáris pontok esetén C pont A és B pontokra vonatkozó harmonikus társát (jelöljük D-vel) a következőképp szerkeszthetjük meg:

- Válasszunk egy tetszőleges, az összes többitől különböző, az AB-vel nem kollineáris E pontot.
- Az EC egyenesen válasszunk egy tetszőleges, E és C pontoktól különböző F pontot.
- $BF \cap AE = G$ és $AF \cap BE = H$.
- $GH \cap AB = D$.

Az E és F pontok helyzetétől függetlenül a D pont helyzete egyértelmű, lásd `https://www.geogebra.org/m/eywb4hzb` oldalon.

A következő két tétel (1. és 2.) bizonyítása megtalálható a [3] tanulmányban.

1. Tétel (*Pólus és poláris*) Legyen adott egy κ kúpszelet és egy, a kúpszeletre nem illeszkedő P pont. Jelöljük egy P-re illeszkedő κ tetszőleges szelőjét f-nek, és legyen P-nek a szelőre illeszkedő kúpszeletpontokra (a 2a. és 2b. ábrákon A és B pontokra) vonatkozó harmonikus társa P_{ht}. Az így kapott P_{ht} pontok kollineárisak, azaz egy, a szelő megválasztásától független egyenesre illeszkednek. Közös egyenesüket P **polárisának** hívjuk, és azt mondjuk, hogy P a kapott egyenes **pólusa**. Ha P külső pont, akkor P pólusa a P-re illeszkedő kúpszeletérintők érintési pontjait összekötő egyenes.



(a) P külső pont (interaktív ábra: `https://www.geogebra.org/m/jzhzbabd`)

(b) P belső pont (interaktív ábra: `https://www.geogebra.org/m/yavbqsb3`)

2. ábra. A P ponton áthaladó változó f szelő által indukált P_{ht} pontok halmaza

2. Tétel Ha Q illeszkedik a P pont p_P polárisára, akkor a P illeszkedik a Q pont p_Q polárisára.

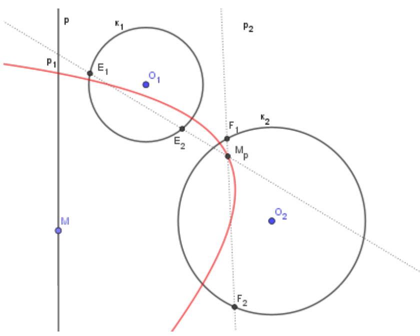
Az 1. és 2. Tételekből adódik a következő állítás:

1. Lemma Ha P a kúpszelet belső pontja, akkor P polárisa a P ponton áthaladó szelő kúpszeletpontjaiból húzott kúpszeletérintők metszéspontjainak halmaza (interaktív ábra: `https://www.geogebra.org/m/uywgpprz`).

A PROBLÉMA MEGFOGALMAZÁSA

Az alapfogalmak bemutatása után ismertetjük a bevezetésben említett sejtésre alapuló tételt:

3. Tétel Legyen adott egy p egyenes és két különböző kör k_1 és k_2, melyekre igaz, hogy legalább az egyik kör középpontja nem illeszkedik a p egyenesre. Legyen M pont a p egyenes tetszőleges pontja. Azon pontok mértani helye, melyet M pont k_1 és k_2-re vett polárisainak metszeteként kapunk, ha az M pont végigfut a p egyenesen, az egy kúpszelet.



3. ábra. Az M_p pontok halmaza kúpszelet

Bizonyítás. Az átláthatóság kedvéért a következő jelöléseket használjuk: egy tetszőleges P pont x koordinátája legyen P_x, y koordinátája legyen P_y. Válasszuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy minél jobban leredukáljuk a paraméterek számát. A p egyenes essen egybe az y tengellyel, ekkor $M \in p$-re érvényes $M = (M_x, M_y) = (0, k)$, $k \in \mathbb{R}$. Legyen az egyik kör egységsugarú $r_1 = 1$, a másik általános sugarú $r_2 = r$. Középpontjuk helyzete legyen általános $O_1 = (O_{1x}, O_{1y})$ és $O_2 = (O_{2x}, O_{2y})$ koordinátákkal. A két kör általános egyenlete

$$k_1: \quad (x - O_{1x})^2 + (y - O_{1y})^2 - 1 = 0,$$

$$k_2: \quad (x - O_{2x})^2 + (y - O_{2y})^2 - r^2 = 0.$$

Keressük az M pont k_1 és k_2 kúpszeletekre vonatkoztatott polárisainak általános egyenletét. Az M pont körökhöz vett helyzetétől függően három eset állhat fenn:

1. Tételezzük fel, hogy M pont mindkét kör külső pontja. Az M pont polárisa k_1-re nézve legyen p_1, k_2-re nézve p_2. Az M pont k_1 körre vonatkoztatott p_1 polárisa az M pontból k_1-hez húzott érintők érintési pontjait köti össze (1. Tétel). Jelöljük $p_1 \cap k_1 = E$ és $p_2 \cap k_2 = F$. Mivel $ME \perp EO_1$ és $MF \perp FO_2$, ezért

$$(E_x - M_x)(E_x - O_{1x}) + (E_y - M_y)(E_y - O_{1y}) = 0, \tag{1}$$

$$(F_x - M_x)(F_x - O_{2x}) + (F_y - M_y)(F_y - O_{2y}) = 0. \tag{2}$$

Mivel $E \in k_1$ és $F \in k_2$, így

$$(E_x - O_{1x})(E_x - O_{1x}) + (E_y - O_{1y})(E_y - O_{1y}) - 1 = 0, \tag{3}$$

$$(F_x - O_{2x})(F_x - O_{2x}) + (F_y - O_{2y})(F_y - O_{2y}) - r^2 = 0. \tag{4}$$

Mivel E pont koordinátái eleget tesznek (1) és (3) egyenleteknek, így eleget tesznek az egyenletek tetszőleges lineáris kombinációjának is, vagyis (1)−(3) egyenletnek is. Analóg módon igaz F pontra is. Az így kapott p_1 és p_2 poláris egyenlete

$$p_1: \quad (O_{1x} - M_x)x + (O_{1y} - M_y)y + M_xO_{1x} - O_{1x}^2 + M_yO_{1y} - O_{1y}^2 + 1 = 0 \tag{5}$$

és

$$p_2: \quad (O_{2x} - M_x)x + (O_{2y} - M_y)y + M_xO_{2x} - O_{2x}^2 + M_yO_{2y} - O_{2y}^2 + r^2 = 0. \tag{6}$$

2. Tételezzük fel, hogy az M pont illeszkedik valamelyik körre, legyen ez a k_1 kör. Ebben az esetben a (1) és (3) egyenletek szintén érvényesek, tehát az M pont polárisának egyenlete megegyezik a (5) egyenlettel.

3. Tételezzük fel, hogy az M pont valamely kör belső pontja, legyen ez a kör k_1. Jelöljük M pont k_1 körre vonatkoztatott polárisát p_1-gyel. Felhasználva az 2. Tételt, ha a p_1 egyenesen választunk egy tetszőleges A pontot, akkor M pont illeszkedik az A pont polárisára, vagyis ha A pont polárisa

$$p_A: \quad (O_{1x} - A_x)x + (O_{1y} - A_y)y + A_xO_{1x} - O_{1x}^2 + A_yO_{1y} - O_{1y}^2 + 1 = 0$$

egyenlettel adott (felhasználva az előző esetben kapott eredményeket) és érvényes hogy $M \in p_A$, akkor kapjuk

$$(O_{1x} - A_x)M_x + (O_{1y} - A_y)M_y + A_xO_{1x} - O_{1x}^2 + A_yO_{1y} - O_{1y}^2 + 1 = 0.$$

Mivel ez minden A_x és A_y ($A \in p_1$) koordinátára érvényes, így ezeket általánosítva kapjuk M pont k_1 kúpszeletre vonatkoztatott polárisának egyenletét

$$p_1 : \quad (O_{1x} - x)M_x + (O_{1y} - y)M_y + xO_{1x} - O_{1x}^2 + yO_{1y} - O_{1y}^2 + 1 = 0,$$

amely egyenlet megegyezik a (5) egyenlettel.

Láthatjuk, hogy M pont helyzetétől függetlenül a polárisok egyenletei k_1 körre vonatkoztatva a (5) egyenlet, és k_2 körre vonatkoztatva a (6) egyenlet. Keressük a $p_1 \cap p_2 = M_p$ pont mértani helyét, vagyis a pont által leírt görbe általános egyenletét. $M_x = 0$ és $M_y = k$ koordinátákat felhasználva, a (5) egyenletből k változó paramétert kifejezve és (6) egyenletbe helyettesítve kapjuk az M_p pont által leírt görbe egyenletét

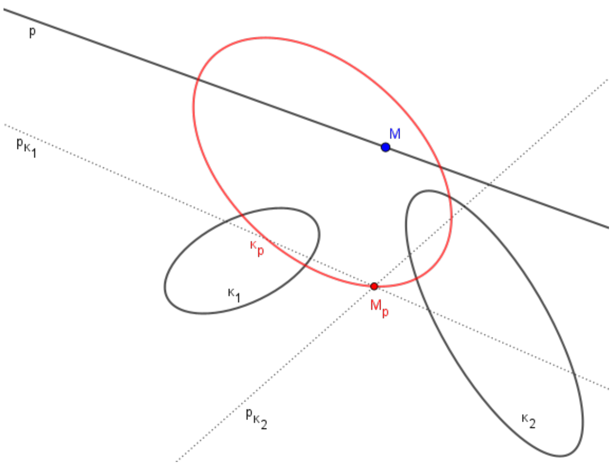
$$\begin{aligned} \kappa : \quad xy \cdot (O_{1x} - O_{2x}) + y^2 \cdot (O_{1y} - O_{2y}) + x \cdot (O_{1y}O_{2x} - O_{1x}O_{2y}) + \\ + y \cdot (O_{2x}^2 - O_{1x}^2 + O_{2y}^2 - O_{1y}^2 + 1 - r^2) + \\ + O_{2y}O_{1x}^2 - O_{2x}^2O_{1y} + O_{1y}^2O_{2y} - O_{2y} - O_{2y}^2O_{1y} + O_{1y}r^2 = 0, \end{aligned}$$

mely egyértelműen másodfokú egyenlet, vagyis az M_p pont kúpszeleten fut végig. □

ÁLTALÁNOSÍTÁS

Jogosan feltételezhetjük, hogy az előző tétel általánosítható, és a körök felcserélhetőek kúpszeletekre.

4. Tétel Legyen adott két különböző kúpszelet és egy olyan egyenes, melyre igaz, hogy legalább az egyik kúpszelet szimmetriatengelyével nem esik egybe. Azon pontok halmaza, melyeket egy egyenesen futó pont e két kúpszeletre vonatkoztatott polárisainak metszeteként kapunk, kúpszelet.



4. ábra. Az M_p pontok halmaza kúpszelet

A következő alfejezetekben a 4. Tételnek a bizonyítási lehetőségeit írjuk le.

A tétel analitikus bizonyítása euklideszi síkban

A derékszögű koordináta rendszerben legyen adott két kúpszelet κ_1, κ_2 és egy p egyenes a következő egyenletekkel

$$\kappa_1: \quad a_1 \cdot x^2 + 2 \cdot b_1 \cdot xy + c_1 \cdot y^2 + 2 \cdot d_1 \cdot x + 2 \cdot e_1 \cdot y + f_1 = 0,$$
$$\kappa_2: \quad a_2 \cdot x^2 + 2 \cdot b_2 \cdot xy + c_2 \cdot y^2 + 2 \cdot d_2 \cdot x + 2 \cdot e_2 \cdot y + f_2 = 0,$$
$$p: \quad x = k \cdot y + h,$$

ahol $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, k, h \in \mathbb{R}$, az a_1, b_1, c_1 paraméterek közül, és az a_2, b_2, c_2 paraméterek közül is legalább az egyik nem nulla.

Választunk egy M pontot a p egyenesen. Az M pont koordinátái legyenek (M_x, M_y), melyre érvényes, hogy $M_x = k \cdot M_y + h$. Bizonyításunk során azt az esetet vizsgáljuk, amikor az egyenes nem metszi egyik kúpszeletet sem. Amennyiben az egyenes metszené valamely kúpszeletet, úgy M pont valamely kúpszelet belső pontja lenne – ebben az esetben a 2. Tételt felhasználva (analóg módon, mint az előző fejezetben) a polárisok ugyanazon egyenleteit kapjuk.

Keressük az M pont polárisát az egyik kúpszelethez viszonyítva, legyen κ_1 ez a kúpszelet. Az M pont polárisa az M pontból κ_1-hez húzott érintők érintési pontjait köti össze. Jelöljük az egyik érintési pontot A-val. Az érintők tulajdonságait tekintve tudjuk, hogy egy görbe érintője A pontban meghatározható annak segítségével, hogy a görbe és az érintő meredeksége megegyezik ebben a pontban. A kúpszelet meredekségét meghatározni már középiskolán túl mutató feladat, aholis egy függvény deriváltját keressük egy adott pontban. Az M ponton áthaladó, κ_1 kúpszeletet A pontban érintő egyenes egyenlete

$$t_A: \quad M_y - A_y - \frac{-a_1 \cdot A_x - b_1 \cdot A_y - d_1}{b_1 \cdot A_x + c_1 \cdot A_y + e_1} \cdot (M_x - A_x) = 0. \tag{7}$$

Mivel $A \in \kappa_1$, így

$$a_1 \cdot A_x^2 + 2 \cdot b_1 \cdot A_x A_y + c_1 \cdot A_y^2 + 2 \cdot d_1 \cdot A_x + 2 \cdot e_1 \cdot A_y + f_1 = 0. \tag{8}$$

Az A érintési pont koordinátái eleget tesznek (7) és (8) egyenleteknek, ezért eleget tesz ezen egyenletek lineáris kombinációjának is, vagyis az (8)−(7) egyenletnek is. Az egyenlet rendezésével és általánosításával megkapjuk az M pont κ_1-re vonatkoztatott polárisának egyenletét, ami

$$p_1: \quad x(M_x a_1 + M_y b_1 + d_1) + y(M_x b_1 + M_y c_1 + e_1) + (M_x d_1 + M_y e_1 + f_1) = 0. \tag{9}$$

Analóg módon megkapható M pont κ_2-re vonatkoztatott polárisának egyenlete:

$$p_2: \quad x(M_x a_2 + M_y b_2 + d_2) + y(M_x b_2 + M_y c_2 + e_2) + (M_x d_2 + M_y e_2 + f_2) = 0. \tag{10}$$

$M_x = kM_y + h$ behelyettesítésével és M_y eliminálásával a (9) és (10) egyenletekből kapjuk az $M_p = p_1 \cap p_2$ pont által leírt görbe általános egyenletét

$$\begin{aligned}
&x^2(ha_1b_2 - ha_2b_1 - ka_1d_2 + ka_2d_1 - b_1d_2 + b_2d_1)+\\
&xy(ha_1c_2 - ha_2c_1 + ka_2e_1 - ka_1e_2 + kb_2d_1 - kb_1d_2 + b_2e_1 - b_1e_2 + c_2d_1 - c_1d_2)+\\
&y^2(hb_1c_2 - hb_2c_1 + kb_2e_1 - kb_1e_2 + c_2e_1 - c_1e_2)+\\
&x(ha_1e_2 - ha_2e_1 + hb_2d_1 - hb_1d_2 + ka_2f_1 - ka_1f_2 + b_2f_1 - b_1f_2 + d_1e_2 - d_2e_1)+\\
&y(hb_1e_2 - hb_2e_1 + hc_2d_1 - hc_1d_2 + kb_2f_1 - kb_1f_2 + kd_2e_1 - kd_1e_2 + c_2f_1 - c_1f_2)+\\
&(hd_1e_2 - hd_2e_1 + kd_2f_1 - kd_1f_2 + e_2f_1 - e_1f_2) = 0.
\end{aligned}$$

Az M_p pontok halmaza tehát egy κ_f kúpszelet, melynek egyenlete

$$\kappa_f : \quad a_f \cdot x^2 + 2 \cdot b_f \cdot xy + c_f \cdot y^2 + 2 \cdot d_f \cdot x + 2 \cdot e_f \cdot y + f_f = 0, \tag{11}$$

ahol

$$a_f = \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}, \qquad b_f = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & e_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ b_1 & c_1 & e_1 \end{vmatrix},$$

$$c_f = \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ b_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & e_2 \end{vmatrix}, \qquad d_f = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{vmatrix},$$

$$f_f = \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{vmatrix}, \qquad e_f = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ b_1 & c_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & k & h \\ b_2 & c_2 & e_2 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{vmatrix}.$$

A tétel analitikus bizonyítása a projektív síkon
Elméleti háttér

A *projektív sík* egy olyan $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ rendezett hármas, ahol $\mathcal{P}$ ponthalmaz, $\mathcal{L}$ egyeneshalmaz, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ illeszkedési reláció ($X \in \mathcal{P}$ pont illeszkedik az $l \in \mathcal{L}$ egyenesre, ha $(X, l) \in \mathcal{I}$) és teljesülnek rá az alábbi axiómák:

- Bármely két különböző pontra illeszkedik pontosan egy egyenes.
- Bármely két különböző egyenesnek létezik egy és csak egy közös pontja.
- Létezik négy olyan pont, amelyek közül semelyik három nem kollineáris.

A projektív síkot elképzelhetjük úgy, mint a valós euklideszi sík kibővítve *végtelen távoli pont*okkal és *végtelen távoli egyenes*sel. A párhuzamos egyenesek ugyanabban a végtelen távoli pontban metszik egymást (ez a pont a párhuzamos egyenesek egyetlen közös pontja). Minden végtelen távoli pont illeszkedik a végtelen távoli egyenesre, és minden egyenesre illeszkedik az általa reprezentált végtelen távoli pont. Egy projektív sík egy egyenesre illeszkedő összes pontjának halmazát *pontsor*nak, ezt az egyenest pedig a pontsor *tartóegyenes*ének nevezzük. Az egy pontra illeszkedő egyenesek halmazát *sugársor*nak, ezt a pontot pedig a sugársor *tartópont*jának nevezzük. A projektív sík részletes bemutatása megtalálható a [3] tanulmányban.
Az analitikus projektív geometriában homogén koordinátákat használunk. Előnyük, hogy koordinátákat (számhármast) rendelünk pontokhoz és egyenesekhez is. Az euklideszi síkban megtalálható (x, y) pont megfelelője a $(x, y, 1)$, illetve ennek bármely nullától különböző szorzata, vagyis például az $(x, y, 1) = (2x, 2y, 2) = (\lambda x, \lambda y, \lambda)$, ahol $\lambda \neq 0$, homogén koordináták ugyanazt a pontot határozzák meg. Az euklideszi síkban $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot 1 = 0$ egyenlettel megadott egyenes megfelelője az $(a, b, c) \cdot \lambda$ homogén koordináta. A végtelen távoli pont homogén koordinátája $(x, y, 0) \cdot \lambda$ a végtelen távoli egyenes $(0, 0, 1) \cdot \lambda$ homogén koordinátával adható meg. Projektív síkon való analitikus számolásnál egy tetszőleges $P = (P_1, P_2, P_3)$ homogén koordinátájú pont megfelelője a $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}^T$ vektor. A valós euklideszi síkban ennek a pontnak a koordinátái $P = (\frac{P_1}{P_3}, \frac{P_2}{P_3})$. Könnyen belátható, hogy az $(x, y, 1) = (\lambda x, \lambda y, \lambda)$ pont az (a, b, c) egyenesen

fekszik, ha skalár szorzatuk 0. Két pont $P = (P_1, P_2, P_3)$ és $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ éppen akkor fekszenek az $l = (l_1, l_2, l_3)$ egyenesen, ha érvényes $P \times Q = l$. Az l egyenes homogén koordinátái tehát $(P_2Q_3 - P_3Q_2, -P_1Q_3 + P_3Q_1, P_1Q_2 - P_2Q_1)$. Két egyenes metszéspontjának $M = l \cap m$ homogén koordinátáira érvényes $M = l \times m$. Egy kúpszelet azon pontok halmaza, amelynek koordinátái eleget tesznek a következő egyenletnek

$$x^T Cx = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

ahol $det(C) \neq 0$. Amennyiben a determináns értéke 0 lenne, elfajult kúpszeletet kapnánk.
Egy P pont C mátrixszal adott kúpszeletre vett l polárisára érvényes $l = C \cdot P$, valamint fordítva, az l poláris P pólusára érvényes $P = C^{-1} \cdot l$. Homogén koordinátákkal és kúpszeletekkel kapcsolatos részletesebb magyarázat a [2] és [4] könyvekben található.

Bizonyítás

1. Legyen adott κ_1 kúpszelet C_1, κ_2 kúpszelet C_2 mátrixokkal, és M pont.

2. Az M pont polárisa a κ_1 kúpszelethez viszonyítva $p_1 = C_1 \cdot M$, és a κ_2 kúpszelethez viszonyítva $p_2 = C_2 \cdot M$.

3. Legyen $M_p = p_1 \cap p_2$, azaz $M_p = p_1 \times p_2$. Az M_p pont homogén koordinátáit jelöljük $(M_{px}, M_{py}, M_{pz}) = (\frac{M_{px}}{M_{pz}}, \frac{M_{py}}{M_{pz}}, 1)$, vagyis az M_p pont koordinátáira érvényes, hogy

$$x = \frac{M_{px}}{M_{pz}}, \tag{12}$$

$$y = \frac{M_{py}}{M_{pz}}. \tag{13}$$

4. Mivel M pont a p egyenesen fekszik, ezért érvényes, hogy $M_x = k \cdot M_y + h$. Ezt (12) és (13) egyenletekbe behelyettesítve és M_y eliminálásával a (11) egyenletet kapjuk, amit az előző fejezetben leírtunk. A számolás ebben az esetben nem lehetetlen, de bonyolult. A Maple [5] programmal végzett munkamenet megtalálható a `https://drive.google.com/file/d/1JXEEZbQMmRHXZ7lWDS2wS8afSJIGtNSc/view?usp=sharing` linkre kattintva.

Megjegyzés: A 2. lépésnél a p_1 és p_2 polárisok homogén koordinátáit felhasználva fel lehet írni a polárisok egyenleteit, ugyanabban az alakban, mint az előző fejezetben a (9) és (10) egyenletek. Innét eljutni a kívánt eredményig egyszerűbb feladat.

A tétel bizonyítása projektív síkon analitikus módszerek nélkül
Elméleti háttér

3. Definíció (*Perspektivitás*) Egy pontsort egy sugársorra képező perspektivitáson azt a leképezést értjük, ami a pontsor minden eleméhez a sugársor azon egyenesét rendeli, amely az adott ponton áthalad.

4. Definíció (*Projektivitás*) Egy pontsort vagy sugársort egy másik pontsorra vagy sugársorra képező projektív leképezésen véges sok, pontsorok és sugársorok közötti perspektivitás kompozícióját értjük.

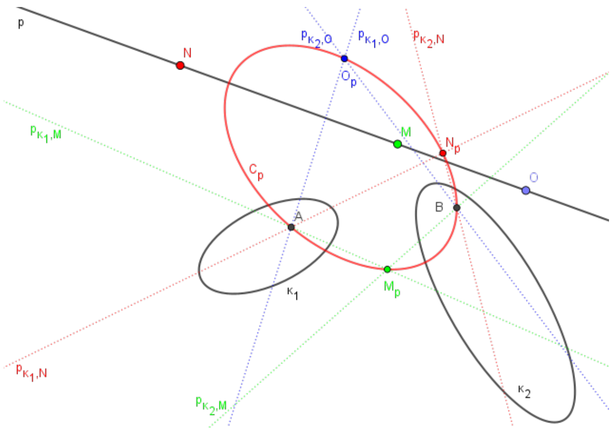
A [3] tanulmányban megtalálhatóak a perspektivitás és projektivitás részletesebb leírása is. A bizonyítás során felhasználjuk továbbá az 2. Tételt, a [2] könyvben leírt Steiner kúpszelet-meghatározást és a [3] tanulmányban megtalálható tételt pólus-poláris kapcsolatról szóló tételt.

5. Tétel (*Steiner tétel*) Az x és y változó egyenes haladjon át a rögzített A és B ponton, mégpedig úgy, hogy x és y projektív, de nem perspektív kapcsolatban állnak egymással. Ekkor az $x \cap y$ ponthalmaz egy, az A és B ponton áthaladó kúpszelet.

6. Tétel A pólus-poláris kapcsolat projektív leképezés.

Bizonyítás

Jelöljük A-val p egyenes pólusát κ_1 kúpszeletre nézve és B-vel p egyenes pólusát κ_2 kúpszeletre nézve. Mivel p egyenes pólusa az A pont, ezért a p egyenes minden M pontjának polárisára illeszkedik az A pont, vagyis A pont a κ_1-re vonatkoztatott $M \in p$ pontok által meghatározott polárisok sugársorának tartópontja. Analóg módon B a κ_2-re vonatkoztatott $M \in p$ pontok által meghatározott polárisok sugársorának tartópontja. Mivel a pólus poláris kapcsolat projektív leképezés, így az általunk meghatározott leképezés projektivitás a projektív sík A és B tartópontú sugársorai között és a megfelelő sugarak metszéspontjai kúpszeletet határoznak meg.



5. ábra. Az A és B pont a polárisok sugársorának tartópontja

ÖSSZEFOGLALÓ

Az általunk is megfogalmazott, ismert problémát többféle megközelítéssel bizonyítottuk. Először klasszikus analitikus módszerekkel, melyek középiskolát végzett diákok számára is ismerős lehet. Ezután a problematikát áthelyeztük projektív síkba, és a projektív sík analitikus módszereivel bizonyítottuk a tételt. Ez a bizonyítás hosszadalmasabbnak bizonyult az euklideszi koordinátákra való visszaváltás miatt. A legrövidebb és legfrappánsabb bizonyítást az analitikus módszerek teljes elhagyásával, csak projektív geometriai ismereteket felhasználva kaptuk. Habár sejtésünk nem újkeletű dolog, mégis érdekesnek találjuk, hogy egy látszólag bonyolult, másodfokú egyenletekkel és deriválásokkal tarkított levezetés projektív geometriai ismeretekkel elegánsabban bizonyítható. Következő munkánkban azt szeretnénk vizsgálni, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie az adott kúpszeletek és az egyenes helyzetét illetően, hogy meghatározott kategóriájú kúpszeletet (ellipszist, parabolát, hiperbolát vagy elfajult kúpszeletet) kapjunk.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] GeoGebra. 2024. URL: https://www.geogebra.org/.

[2] Coxeter H.S.M. *Projektív geometria*. hu. Gondolat Könyvkiadó Budapest, 1986. ISBN: 963-281-678-1.

[3] Z. Szilasi. *Bevezetés a projektív geometriába*. 2013. URL: http://riemann.math.unideb.hu/~szzoltan/projektiv2019.htm.

[4] Richter – Gebert J. *Perspectives on Projective Geometry*. eng. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 3-642-17285-7.

[5] Maple – The Essential Tool for Mathematics. 2024. URL: https://www.maplesoft.com/.