

## A FELADATMEGOLDÁS PROBLÉMÁJA AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN

Szilárd SVITEK<sup>1</sup> – Imrich CSICSAY<sup>2</sup>

### ABSTRACT

Problem solving is an important tool in the subject of mathematics. We can use it to practice the different topics or for deepening the knowledge. In most cases, the solution of the problem is written on paper, less frequently on the board by the students. At the board the student has the opportunity to express himself verbally, while during the written examination we are not able to get a better insight into the students' way of thinking. In this study, we supplemented the paper-based solutions with mixed-type interviews, to better understand the students train of thought.

### Keywords

Problem solving, open tasks, mechanical thinking

### BEVEZETÉS

A mai matematikaoktatásban a zárt feladatok dominálnak [2]. Egy feladatot zártnak tekinthetünk, ha a feladatban a kiindulási feltételek és a kérdés (elérendő végállapot), valamint a megoldás módja (megoldási út) illetve a feladat megoldása egyértelműen adott. Akkor beszélhetünk nyitott feladatokról, ha az előbbiek közül legalább az egyik nem előre adott. Pehkonen [10] egy feladatot csak akkor nevez nyitottnak, ha az előbbiek közül a kiindulási- vagy a célállapot nincs pontosan meghatározva. A nyitott feladatokat a kiindulási állapot – megoldási út – célállapot nyitottsága/zártsága szerint 8 csoportba oszthatjuk [4]:

#### 1. Táblázat. A nyitott feladatok fajtái [4]

	kiindulási állapot	megoldási út	célállapot
1. típus: Probléma szituáció	nyitott	nyitott	nyitott
2. típus: Homályos probléma	nyitott	nyitott	zárt
3. típus: Interpretációs probléma	zárt	nyitott	nyitott
4. típus: Stratégia-keresési probléma	zárt	nyitott	zárt
5. típus: Interpretációs feladat	zárt	zárt	nyitott
6. típus: Egyszerű nyitott feladat	zárt	zárt	zárt
7. típus: Feladatalkotás	nyitott	zárt	nyitott
8. típus: Kiindulási állapot konstruálása	nyitott	zárt	zárt

A nyitott feladatok segíthetnek a fogalomháló mind vertikális, mind horizontális építésében [4]. A nyitott feladatok kellő motivációval szolgálhatnak a diákok számára, hogy a való életből vett problémákat matematikai szemmel lássák és azt megértsék. A valós szituációkon alapuló feladatok esetében a kezdeti, kiindulási állapotot több különféle tényező is befolyásolhatja. Ezek különféle módon történő rögzítésével, több eltérő eredményt is kaphatunk, tehát nyitott problémáról beszélünk. Az egyes feltételek meghatározása alapján elkészült valós majd matematikai modell vezet a kiindulási feltételekhez tartozó megoldás elkészítéséhez. Végül a

<sup>1</sup> Mgr. Svitek Szilárd, Matematika Tanszék, SJE Komárom, sviteks@uj.s.sk

<sup>2</sup> Mgr. Csicsay Imrich, Matematika Tanszék, SJE Komárom, 118000@student.uj.s.sk

megoldás értékelésénél figyelemmel kell lennünk a kiindulási tényezőkre ismét. Szükséges eldöntenünk, hogy az előre meghatározott feltételek mellett vajon elfogadható-e a megoldás, amit kaptunk. Érdekes még megnéznünk az eredményünk helyességét az eredeti feladat szemszögéből is, hiszen szükség lehet arra, hogy a meghatározó tényezőket megváltoztatva egy új megoldást keressünk. A valós szituációkon alapuló nyitott feladatok különös jelentőséggel bírnak, mert elősegíthetik a diákok kreativitásának, kritikus- és a problémamegoldó gondolkodásának fejlődését [3]. Motiválhatja őket a matematikai elgondolás, illetve a mögöttes matematikai tartalom megértésére is.

A szöveges nyitott feladatok igényességéről tanúskodik az a tény is, hogy a minden évben megrendezésre kerülő Tesztelés 5 2018-as és 2019-es kiadványában is említésre kerülnek, ahol felhívják a figyelmet ezek gyakorlására [8], [9].

A diákok a tanulmányaik folyamán, amikor már olyan problémákkal találkoznak iskolai körülmények között, mint amilyen az általunk vizsgált feladat is, egy „mechanikus levezetést” alkalmaz. A szövegben megkeresi az ismert adatokat, felírja az ismeretlent és a többi körülményt figyelmen kívül hagyja.

A rutinon kívül a másik oka a pusztán emberi tényező is lehet. Sajnos a gyakorlatban vannak olyan tanárok is, akik csak a saját módszereiket fogadják el jó megoldásnak. Hiába oldotta meg a diák a feladatot sikerrel egy más, általa előtte ismert, vagy éppen a probléma megoldása közben önmagától felismert módszerrel. Ezzel a diákot kényszerhelyzetbe hozhatja, mivel a saját maga felfedezett tudást aktuálisan nem alkalmazhatja. A tanár „szabályai” szerint kezdi, szintén „mechanikusan” oldani a feladatokat, és nem kockáztatja az önállóságot, nehogy ebből további kellemetlensége legyen.

A mechanikus problémamegoldás harmadik faktora lehet a matematikai tudás hiánya, a pusztán „túlélésért” folytatott harc. Ilyenkor a diák a hiányosságait a feladat megértése helyett a bemagolt szabályok alapján meghatározott módon igyekszik elvégezni. A lépéseket nem érti, csak végzi. Ennek később nagyobb problémái lehetnek a magasabb szintű matematikai ismeretek szerzésénél is [6].

A munka célja az volt, hogy felmérjük a diákok azon kompetenciáját, hogy mennyire gondolkodnak nyitottan, vagy épp „mechanikusan” valóságközeli feladatok esetén. A feltételezéseink szerint, valamint a korábbi eredményekre alapozva feltételeztük, hogy a tanulók döntő többsége zártan gondolkodik valós tartalmú feladatok esetében. Az interjúk célja az volt, hogy a diákok gondolatmenetét minél mélyrehatóbban meg tudjuk ismerni, lehetőséget biztosítva, hogy szóban is megnyilvánulhassanak.

## **MINTA**

A vizsgálatban két középiskola vett részt: egy magyarországi középiskola teljes 10. évfolyama és egy szlovákiai középiskola 1. évfolyama. A két középiskolából összesen 120 diák oldotta meg a feladatot (magyarországi diákok közül 52-en, míg a szlovákiai középiskolából 68-an,  $n=120$ ). Az iskolák kiválasztásánál figyelembe vettük az ottani diákok tanulmányi átlagát, amely átlag közepesnek (hármás) volt mondható. A korábban kifejtettek alapján a feladat megoldhatósága könnyűnek mondható, már az alapiskola 5. osztályában rendelkeznek a diákok a szükséges ismeretekkel.

## **MÓDSZER**

A kutatásunkhoz egy konkrét valóságközeli nyitott feladatot használtunk fel. Miután a diákok megoldották a feladatot, elkészítettük velük az interjúkat. Az interjúk közül a kevert típusú interjúra esett a választás. Az interjú elején az alanyhoz strukturált kérdéseket intéztünk, ezzel kijelölve a beszélgetés vezérfonalát, majd egyre jobban háttérbe vonultunk, beszélgettünk az interjú alanyát. Ebből kifolyólag az interjú ezen részében már rugalmasan kellett az interjúzta-

tónak reagálnia, esetlegesen további segítő kérdéseket feltennie. Fontos szempont, hogy az interjú teljes hossza ne legyen időhöz kötve, ne legyenek benne eldöntendő kérdések (ezzel sem befolyásolva az interjú alanyát), ne legyenek az egyes kérdések sem időkorláthoz kötve. Fontos szempont, hogy az interjúztató maradjon semleges az interjú során, tehát saját nézőpontjával, véleményével semmiképp se befolyásolja az interjú alanyát. Számos szakirodalom írja le az interjúk menetét, elemzi őket, felhasználja őket módszerekként, de Trautmann szerint a szakirodalomokban bemutatott interjúkonceptiók közül egyik sem felelt meg azoknál a diákoknál, akikkel ő dolgozott [11]. Az általa is felhasznált kevert interjú kézenfekvő megoldásnak bizonyult, mivel megadta azt a lehetőséget a diákoknak, hogy minél szabadabban fejthessék ki magukat mindamelllett, hogy a bevezető és a továbbsegítő kérdések segítségével összehasonlítható válaszokat is kaptunk. Az interjúkban szem előtt tartottuk, hogy minél nagyobb szabadságot biztosítsunk az alanyoknak, hogy saját maguk tudják elmondani, átadni minél pontosabban, hogy hogyan gondolkodtak [7].

A jelen vizsgálatban használt, már említett nyitott szöveges feladat szituációja a tanulóknak jól elképzelhető és valóságközelinek mondható, szövegezése egyszerű, hasonlít a hagyományos, zárt szöveges feladatokéhoz:

*Amióta Pistiek új lakásba költöztek, hetente kapja a zsebpénzét, 1000 Forintot, amit azóta mindig félre is tesz. Hány napja laknak ott, ha már 35 000 Forintot gyűjtött így össze? Kérjük, indokold meg válaszodat. [1]*

A feladat megoldása nem igényel mélyebb matematikai ismereteket, az általános iskola ötödik osztályában már rendelkeznek a tanulók a feladat megoldásához szükséges kompetenciákkal. A feladat témája – a zsebpénz – még inkább felkeltheti a diákok érdeklődését. A megoldás első ránézésre egyszerűnek tűnik, nem szükséges bonyolult matematikai formulákat felhasználni annak megoldásához. A nyitottsága a feladatnak abból származik, hogy két változó nincs előre definiálva a feladatban. Az, hogy mikor költöztek Pistiek az új otthonukba, illetve hogy a hét mely napján kapja meg a zsebpénzét a fiú. Amint ezt felfedezzük, felfedeztetjük a tanulókkal, a feladat rögtön „nyitottá válik” (a felfedezés előtt is nyitott volt, viszont mivel a megoldó nem gondolt bele a valós szituációba, zárt feladatként kezelte). Tehát ha valaki nyitott feladatként kezelte, akkor a  $245 \pm 6$  intervallumról adott meg több megoldást, vagy feltűntette az egész intervallumot, esetleg több megoldást is megadott.

A diákok túlnyomó része az előre „elvárható” megoldást adta, a 245-öt, ami a zárt gondolkodásra utal. Egyetlen egy diák a szlovákiai iskolából adott olyan választ, amely a nyitott gondolkodásra mutat. További négy diák volt, aki nem a várható 245-öt adta meg válaszul. Ezen négy diák közül a magyarországi középiskolából egy diák volt, aki feltételezhetően felületesen olvasta el a kérdést, mert válaszul a 35-öt adta meg, ami a hetek számát jelentette. Ez a hiba egy diáknál a szlovákiai iskolában is megjelent, ott is szintén a 35 volt végleges válaszként feltüntetve. További két szlovákiai diák pedig számolási hibát vétett, egyikük a 275-öt, másikuk pedig a 265-öt adta meg válaszul.

## **AZ INTERJÚK**

Az eredmények feldolgozása után következtek az interjúk. A diákok eredményeit velük nem közöltük, tehát nem tudhatták, hogy „jól” vagy „rosszul” oldották meg a feladatot. Ezzel is azt szerettük volna elérni, hogy minél kevésbé befolyásoljuk a véleményüket a feladatról. A két iskolában összesen 15 interjú készült (6 darab diák a magyarországi és 9 a szlovákiai középiskolából). A kiválasztás az interjúra egy főn kívül véletlenszerűen történt. Mindenképp szeretnénk volna, hogy interjút tudjunk készíteni a feladatot nyitott megközelítéssel megoldó diákkal is.

Az interjúkat mindig az adott iskolában készítettük, egy külön teremben. Az interjúalanyokat egyenként hallgatta meg ugyanaz az interjúztató. A beszélgetést minden tanulóval ugyanazon

kérdésekkel kezdtük, kijelöltük a beszélgetés vezérfonalát. A bemelegítő kérdéseken kívül tettünk még fel a későbbiekben ellenőrző kérdéseket, amelyek más formában, de tartalmilag ugyanarra rákérdező kérdések voltak, ezekkel a lekérdezés során kapott információkat próbáltuk ellenőrizni. A diákokkal lezajlott interjúk átlagban 4-5 percesek voltak. A diákok válaszaik kódolásánál M (magyarországiaknak) és S (szlovákiaiaknak) jelölést vezettük be, amelyek mellé egy számot rendeltünk az alapján, hogy hányadik interjú zajlott az adott iskolában. (A helyes megoldást megadó diák kódja a S3, a könnyebb megkülönböztetés végett \*-al jelöljük a későbbiekben.)

Az interjú során a diákok megkapták újra a tesztet, amit ők maguk töltöttek ki. Bele már nem írhattak, a további jegyzetek készítésére egy külön (üres) lap állt rendelkezésükre. Ezzel a lehetőséggel nem éltek a diákok, inkább verbálisan nyilvánultak meg. Megkértük őket, hogy olvassák át újra az általuk kitöltött feladatlapot és az azon szereplő megoldásukat. Arra a kérdésre, hogy mi jutott először az eszükbe a feladat elolvasása után, a válaszaik alapján megkülönböztethetünk két halmazt. Az egyiknél a feladat könnyűségét emelték ki a diákok, véleményük szerint elemi tudás is elég volt a megoldáshoz, az ő válaszaiknál a KF (könnyű feladat) jelölést használjuk. A másik halmazba azok tartoztak, akik a való életből vett példaként hivatkoztak rá a zsebpénz miatt. Az ide tartozó diákokat VÉ-vel (való élet) jelöljük. Következésképp megállapíthatjuk, hogy a pénz, mint központi elem hozta ezt magával. Érdekes elmentmondás, hogy a való életből vett feladatként hivatkoztak rá a diákok, de a feladat meg nem adott változóit, hogy melyik nap költöztek oda és melyik napon érik a zsebpénz, nem firtatták.

*Kérdés: Mi jutott eszedbe először, amikor elolvastad a feladatot?*

- ~ M1: Sokat gondolkodtam ezen a feladaton, mert túl könnyűnek tartottam. Kerestem benne a csavart, de nem találtam meg.
- ~ M2: Szimpla logikával megoldható a feladat.
- ~ M5: Nagyon egyszerű, egyértelmű a feladat.
- ~ S1: Megpróbáltam abból kiindulni, hogy egy hónap 31 nappól áll, de aztán rájöttem, hogy nem minden hónap áll ugyanannyi nappól. – megj.: itt megfigyelhető, hogy a diák egyből a megoldásának menetét, a stratégiáját kezdi kifejteni, kimarad a probléma megértésének lépése.
- ~ S3\*: Ez egy életből vett példa, mert pénzzel dolgozunk benne.
- ~ S5: Ez egy egyszerű feladat.
- ~ S6: Elég egyszerűnek tűnt, és nem is volt aztán nehéz megoldani a feladatot. – megj.: egyszerű feladat alatt a diák az interjú alapján a zárt feladatot értette, ahol a kiindulási állapot – megoldási út – célállapot hármas adott.

Kíváncsiak voltunk, hogy saját meglátásaik szerint találkoztak-e már ehhez hasonló feladattal, illetve hogy jelenlegi tudásukkal “milyen” feladatként tartják számon. A kérdésre adott válaszaikból kitűnik, hogy ezt a feladatot egy rutinszerűen megoldandó szöveges feladatként kezelték, ahol az adatokat a szövegből kinyerve, elemi úton kiszámolták a megoldást.

*Kérdés: Láttál már ehhez hasonló feladatot?*

- ~ M1: Igen, találkoztam már szöveges feladattal az általános iskolában.
- ~ S3\*: Nem találkoztam ilyen feladattal még.
- ~ S6: Igen, nagyon sokat jártam matematika versenyekre. – megj.: itt a diák egy következő, a válaszára reflektáló kérdésre megjegyzi, hogy az említett matematika verseny a Pitagorasz volt.
- ~ M6: „... mert meg volt adva minden adat.”

A kérdésre adott válaszaik alapján elsősorban a szöveges feladatokat állították párhuzamba a Zsebpénz feladattal, illetve ezt a feladatot azon közé sorolják, ahol a választ szövegesen kell megfogalmazni.

Az interjúkból még összegyűjtöttük a leginkább elgondolkodtató, releváns megnyilvánulásokat, amelyek a beszélgetés során előjöttek és a diákok gondolkodásmódját reprezentálják, de nem közvetlenül valamelyik kérdésre adott válaszok voltak. Ezek segíthetnek azon kérdés megválaszolásában, mit és hogyan gondolhattak a diákok a feladat megoldása közben. Ezeket a megnyilvánulásokat alább összegyűjtöttük.

- ~ M4: Szerintem ezt jól megoldottam.
- ~ S2: Szerintem jól oldottam meg a feladatot.
- ~ S5: Szerintem leírtam, amit kellett.
- ~ S6: Mindent levezettem, úgy ahogy kellett.
- ~ S6: Nem volt a példa összetett, nem volt mit félreérteni, nem volt, ami félrevezessen. Nem kellett rajta törni a fejem.

Ezekből a megnyilvánulásokról is jól látható, hogy a diákok a saját gondolkodásuk jellemzésénél inkább azt a reflexiót próbálják imitálni, amelyről úgy gondolják, a tanáruk mondaná a munkájukról.

Az interjúkból is látható, hogy a diákokat a feladathoz sokkal közelebb lehetett hozni azzal, hogy a valós életből vett mintát kaptak, de egyben az iskolai matematika és úgy általánosságban véve az iskolai oktatás egyik nagy hiányára is felhívják a figyelmet, hogy a diákok gondolkodását akarva, vagy akaratlanul is, de a zárt, determinisztikus gondolkodásra ösztönzik. Ennek több oka is lehet. Az egyik a matematikai feladatok megoldásának tanítása. A tanárok elmagyarázzák a gyerekeknek, hogy a (szöveges) feladatokból miként lehet kinyerni a szükséges adatokat.

Az interjúra adott válaszaik alapján három csoportot tudunk megkülönböztetni a meginterjúvoltak körében. Ebben az esetben a csoport nem a legideálisabb megfogalmazás, mivel az egyik ilyen „csoportba” csak egy diák került. Az első, és legnagyobb csoport a zártan gondolkodók csoportja. Ez nem meglepő, tekintve az előző felméréseket. A „nyitottan gondolkodó” diák egymaga tartozik a nyitottan gondolkodók csoportjába (ugye itt érezhető a csoport kifejezés erős túlzásként). Egy harmadik csoportot is meg tudunk különböztetni, akik próbálnak nyitottan (legalábbis is az elvártaktól eltérően) gondolkodni. Az elvárásoknak való megfelelés, illetve hogy kevés tapasztalattal rendelkeznek ilyen típusú feladatok megoldásában, végül a zárt gondolkodáshoz vezetnek. Erre (az osztálytermi kultúrára) hivatkozik Greer [5], aki R.B. Davis 1989-es kutatására utal a következő idézettel:

„Was the boy really thinking about solving the actual problem, or was he trying to accommodate himself to the peculiar tribal culture of the American classroom?”

Jelen kutatásban ezt a megállapítást az interjúban adott válaszokból, a tesztjeikből, valamint az interjú utáni megnyilvánulásokról szűrtük le. A diákok közül S6-nál és S5-nél volt leginkább megfigyelhető ez a jelenség. Az interjú után S5 így fogalmazott: „Ezt várják el tőlünk, ez kell majd az érettségire.

Az interjúk nyomán akkor tarthat valaki a harmadik csoportba, tehát azok közé, akik próbálnak nyitottan gondolkodni, ha a beszélgetés során utalást tett arra, hogy az elvárásoknak (legyen az tanári vagy tananyagbéli) igyekezett megfelelni, vagy kijelentést tett arra, hogy jól oldotta meg a feladatot, de elbizonytalanodott az interjú során. Ide sorolhatjuk a következő kóddal rendelkező diákokat: M4, S2, S5, S6.

Megjegyezhetjük, hogy az interjúk végére sem volt senki, aki egyértelműen megállapította volna, hogy a feladat nyitott. Ez ugyan nem volt célja az interjúknak, de érdekes vizsgálati kérdéseket vehetett volna fel. Mint például, hogy mi volt az a jelenség vagy kérdés, ami következtében felfedezte a feladat nyitottságát.

## ÖSSZEFOGLALÁS

Az interjúk során azt a konklúziót szűrhattuk le a legtöbbször, hogy a diákok nem gondoltak bele a valós szituációba. A zsebpénz témaköre miatt való életből vett feladatként hivatkoztak rá a diákok. Mivel kevesebb matematikai ismeretre volt szükségük a feladat megoldásához, ezért könnyűnek titulálták azt, ami szintén vezethetett ahhoz, hogy „gépiesen”, automatizál-  
tan, a megszokott megoldási sémákat használva gondolkodtak. Megmutatkozott az is, hogy a legtöbben az elvárásoknak akartak megfelelni, úgy szerették volna megoldani a feladatot, ahogy tanulták. A feladatmegoldásokból és az interjúkból leszűrhető (mint külön-külön, mint egyben tekintve), hogy a diákok nem kapcsolják össze a matematikát a való élettel, és sok esetben a feladatot mechanikusan oldják meg.

## IRODALOMJEGYZÉK

- [1] AMBRUS, G. (2016). The Pocket Money Problem. In A. Kuzle, B. Rott, & T. H. Čadež (Eds.), *Problem Solving in the Mathematics Classroom - Perspectives and Practices from Different Countries* (pp. 49-59). Münster: WTM Verlag
- [2] BÜCHTER, A., LEUDERS, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung prüfen*, Cornelsen Scriptor, Berlin
- [3] CHAPMAN, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 211-230.
- [4] GREEFRATH, G. (2004). Offene Aufgaben mit Realitätsbezug. Eine Übersicht mit Beispielen und erste Ergebnisse aus Fallstudien. *mathematica didactica*, 27(2), 16–38.
- [5] GREER, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and instruction*, 7, 293-307.
- [6] HEJNÝ, M. (1989). *Teória vyučovania matematiky 2*. Slovenské pedagog. Naklad. Bratislava. ISBN: 80-08-00014-7
- [7] KÜSTERS, I. (2009) *Narrative Interviews: Grundlagen und Anwendungen*. VS Verlag für Sozialwissenschaften. ISBN 978-3-531-16153-2
- [8] NÚCEM. Tesztelés 5-2018 (online)  
<https://www.nucem.sk/dl/4361/Spr%C3%A1va%20T5%202018%205.4.2018%20-%20final.pdf>
- [9] NÚCEM. Tesztelés 5-2019 (online)  
<https://www.nucem.sk/dl/4721/Sprava%20T5%202019%20priebeh%2C%20vysledky%20a%20analyzy.pdf>
- [10] PEHKONEN, E. (1995). Introduction: Use of Open-ended Problems. *International Reviews on Mathematical Education* 27 (2), 55-57.
- [11] TRAUTMANN, T. (2010) *Interviews mit Kindern: Grundlagen, Techniken, Besonderheiten, Beispiele*. Wiesbaden Verlag. ISBN 978-3-531-17127-2